Wiskunde A und B – der niederländische Weg

Anregungen für den Mathematikunterricht

vorläufige Version, Stand: Dezember 2003

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

wird noch erstellt

Einführung

„Als zij een opdracht zien, dan denken ze niet meteen: dat ken ik niet dat kann ik niet, maar laat 'ns proberen.“
„Wenn sie eine Aufgabe sehen, dann denken sie nicht: Die kenn' ich nicht, die kann ich nicht, sondern ich probier' es mal.“[1]

schreiben P. Vos und K. Bos über das Verhalten niederländischer Schülerinnen und Schüler in ihrer Analyse der internationalen Vergleichsstudien zur Situation von Mathematik in den Niederlanden.

Es entsteht der Eindruck, dass die niederländischen Schüler am Ende der Schulzeit eher in der Lage sind, die Mathematik in vielfältigen Alltagssituationen einzusetzen. In internationalen Vergleichsstudien wie TIMSS und PISA schneiden die niederländischen Schüler gut ab, obwohl die Aufgaben den Lehrplaninhalten wenig entsprachen.

Sie, liebe Leserin und Leser, wissen, wie Ihre Schülerinnen und Schüler reagieren. Offensichtlich gibt es eine andere Aufgabenkultur und Aufgabentradition im Mathematikunterricht an niederländischen Schulen. Die andere Sicht auf die Schulmathematik geht im wesentlichen auf den Didaktiker Hans Freudenthal zurück, der in seinem grundlegenden Werk schreibt:

„Ich möchte, daß der Schüler nicht angewandte Mathematik lernt, sondern lernt, wie man Mathematik anwendet.“[2]
„Die Beziehungshaltigkeit sollte garantieren, daß die Mathematik, die man lernt, nicht vergessen wird.“[3]

Das nach ihm benannte Freudenthal Institut an der Universität Utrecht hat in den siebziger Jahren die Realistic Mathematics Education (RME) entwickelt. Schüler sollen Mathematik in für sie bedeutsamen Problemkontexten erfahren. Dadurch können mathematische Begriffe und Verfahren entwickelt und vertieft werden.

Die Umsetzung von RME im Mathematikunterricht wurde 1985 mit der landesweiten Einführung von Wiskunde[4] A (sprich: wiskünde) und B durchgeführt. Mit Wiskunde A sollen die Schülerinnen und Schüler angesprochen werden, deren Vorliebe und Stärke nicht unbedingt die Mathematik ist.

Ein Schwerpunkt dieser Schrift ist deshalb auch die Auswahl von Aufgaben aus dem Zen-

[1] in: P. Vos / K. Bos: Euclides, März 2001. Seite 231f.
[2] Hans Freudenthal: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Stuttgart: Klett-Verlag, 1973, S. 76.
[3] Ebd., S. 79.
[4] Wiskunde ist das niederländische Wort für Mathematik und geht auf Simon Stevin (1548 -1620, Mathematiker und Ingenieur) zurück. Wiskunde ist die Kunst vom sicheren Wissen, so wie es die Mathematiker mit jedem Beweis vollziehen.

tralexamen von Wiskunde A. Die Aufgaben von Wiskunde A sind alle kontextbezogen und erfordern von den Schülern eine hohe Lesekompetenz. Das mathematische Modell zur Lösung einer Aufgabe ist zumeist vorgegeben. In den Aufgaben werden mathematische Stoffgebiete oft vernetzt. In diesen Beispielen zeigt sich deutlich die andere Aufgabenkultur in den Niederlanden. Zu Wiskunde A wird das vollständige Zentralexamen des Jahres 2002 einschließlich der Korrekturanweisungen präsentiert. Es schließen sich weitere besonders typische Teilaufgaben an.

Ergänzend werden Aufgaben aus Wiskunde B (vergleichbar dem Leistungskurs) vorgestellt, in denen auch Beweise und Kenntnisse aus der Elementargeometrie eine Rolle spielen. Es wurden Aufgaben ausgesucht, die eine reizvolle und alternative Sicht auf die niederländischen Prüfungsanforderungen bieten.

Im folgenden Kapitel werden zwei Beispiele vorgestellt, wie man niederländische Aufgaben für das schriftliche Abitur in NRW nutzen kann.

Auch in den Schulbüchern werden die Schülerinnen und Schüler auf Aufgaben mit starkem Kontextbezug vorbereitet. Sie sind so geschrieben, dass die Schüler selbstständig mit ihnen arbeiten können. Lesekompetenz, der Umgang mit Informationen und Fragen-Stellen werden in besonderen Kapiteln vermittelt.

Seit einigen Jahren wird der Wettbewerb A-lympiade in den Niederlanden unter hoher Beteiligung der Schulen durchgeführt. Die Wettbewerbsaufgaben stehen im deutlichen Kontrast zu den Prüfungsaufgaben des Zentralexamens. Bei der A-lympiade wird von den Schülerinnen und Schülern ein hohes Maß an eigenständiger Modellbildung und selbstgesteuertem Arbeiten verlangt. Schülerteams aus dem ganzen Land treten an, um ihre Fähigkeiten in der Problemlösung zu testen. Die A-lympiade wird in ihren Charakteristika dargestellt und eine typische Aufgabenstellung mit Lösungsskizze angeboten.

Seit 2000 gibt es für Schülerinnen und Schüler von Wiskunde B einen eigenen Wettbewerbstag. Die Aufgabenstellung ist dort deutlich theoretischer ausgerichtet.

Weitergehende Informationen zum niederländischen Mathematikunterricht sind im Anhang zusammengestellt. Sie finden Beiträge zum niederländischen Schulsystem, zum Examensprogramma (niederländische Bildungsstandards), zu Wiskunde A und Wiskunde B, zum Einsatz neuer Medien.

Diese Schrift soll ein Einblick in die niederländische Schulmathematik geben. Sicher sind manche Rahmenbedingungen in den Niederlanden nicht vergleichbar mit denen in NRW. So gibt es in den Niederlanden das nationale Testinstitut CITO (in Arnheim), das die Examensaufgaben für alle Fächer bereitstellt.

Wir hoffen, Anregungen für den Mathematikunterricht zu geben, die für Sie umsetzbar sind, und damit zu einer Weiterentwicklung der Aufgabenkultur beitragen.

Das Autorenteam: Harald Brnstrup, Susanne Hanslik, Matthias Lippert, Hubert Massin, Carla Rothe, Bernd Westermann, Willi Weyers, Dezember 2003

Kapitel 1

Wiskunde A: Examensaufgaben

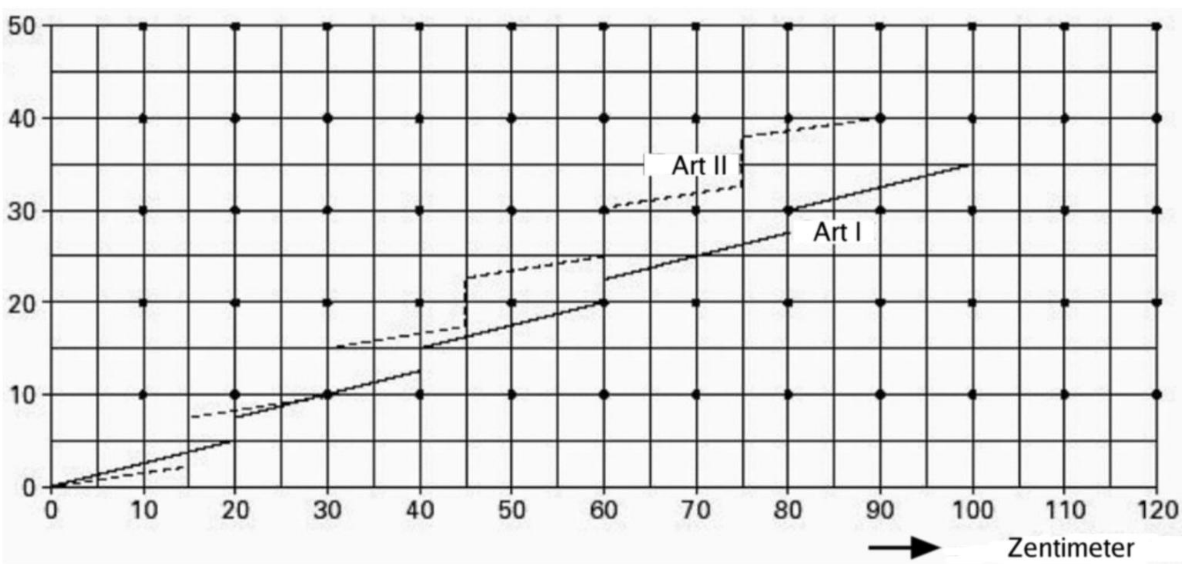
1.1 Examen VWO 2002

Bearbeitungszeit 3 Zeitstunden, 19 Fragen, Gesamtpunktzahl 90 Punkte, 1. Termin

Aufgabe 1: Vögel, die Futter suchen

Vögel, die Futter suchen, haben oft auf dem Erdboden ein charakteristisches Bewegungsmuster von Laufen und Stehenbleiben. In Abbildung 1 ist dieses Bewegungsmuster für zwei Vogelarten schematisch wiedergegeben.

Abbildung 1



Das Bewegungsmuster der Vogelart I hat die drei folgenden Kennzeichen:

a) das Stillstehen dauert jedes Mal $2\frac{1}{2}$ Sekunden;

b) zwischen zwei Stopps legt der Vogel 20 cm zurück;

c) zwischen zwei Stopps läuft der Vogel mit einer Geschwindigkeit von 4 cm pro Sekunde.

Frage 1: (4 Punkte)

Lies aus Abbildung 1 ab, welche drei Kennzeichen das Bewegungsmuster von Vogelart II hat.

Um von einem anderen Vogel (Vogelart III) das Bewegungsmuster zu bestimmen, ist ein solcher Vogel während einer Abfolge von 24 Mal Laufen und Stehenbleiben beobachtet worden. Der Vogel stand insgesamt 180 Sekunden still. Er legte insgesamt 480 cm zurück. Das alles dauerte zusammen 420 Sekunden.

Frage 2: (5 Punkte)

Zeichne in das Achsensystem (als Anlage beigefügt) einen Graphen wie in Abbildung 1 ein, der das Bewegungsmuster dieses Vogels für mindestens 45 Sekunden zeigt. Füge eine Erläuterung hinzu.

Vögel, die ihr Futter in Bäumen und Sträuchern suchen, tun das oft vorzugsweise in einer bestimmten Höhe. Während eines Winters beobachtete man in einem Waldgebiet futtersuchende Vögel. Tabelle 1 zeigt die Verteilung über die verschiedenen Höhen bei 400 Beobachtungen von Blaumeisen.

Tabelle 1

Höhe (in Metern)	$< 1,5$	$1,5-3$	$3-5$	$5-7$	$7-10$	$10-15$	> 15
Anzahl der Beobachtungen	24	26	51	72	122	92	13

Frage 3: (8 Punkte)

Zeige, dass die beobachteten Höhen näherungsweise normalverteilt sind; verwende dazu Wahrscheinlichkeitspapier (als Anlage beigefügt). Lies aus deiner Zeichnung ab, wie groß Mittelwert und Standardabweichung dieser Verteilung sind. Gib beide Werte auf Dezimeter genau an. Mache deine Vorgehensweise in der Zeichnung deutlich.

Die Höhen, in denen man Kleiber und Sumpfmeisen beobachtete, waren auch angenähert normalverteilt. Von diesen beiden Vogelarten sind Mittelwert und Standardabweichung der beobachteten Höhen in Tabelle 2 in Metern angegeben.

Tabelle 2

Vogelart	mittlere Höhe	Standardabweichung
Kleiber	$10,0$	$4,0$
Sumpfmeisen	$4,5$	$1,5$

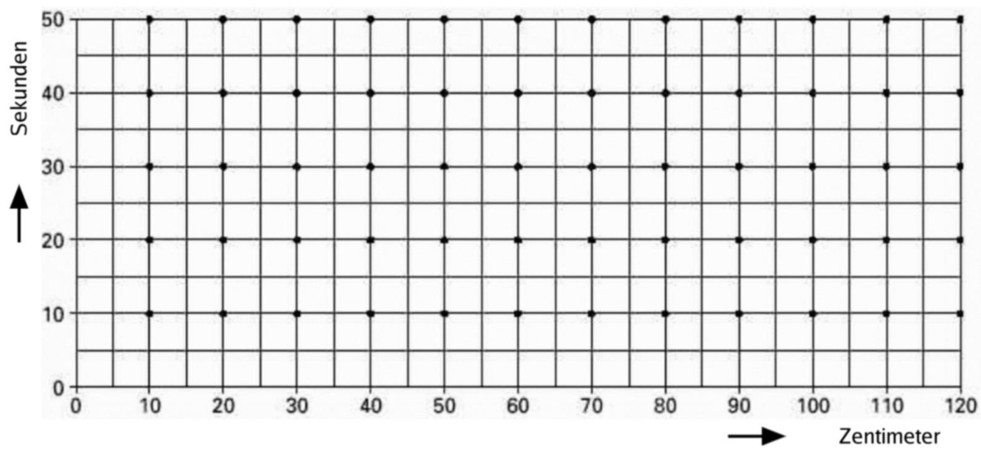
Aus diesen Daten kann man herleiten, dass ungefähr 15% der Kleiber in einer Höhe von 6 bis 8 Metern beobachtet wurden.

Frage 4: (4 Punkte)

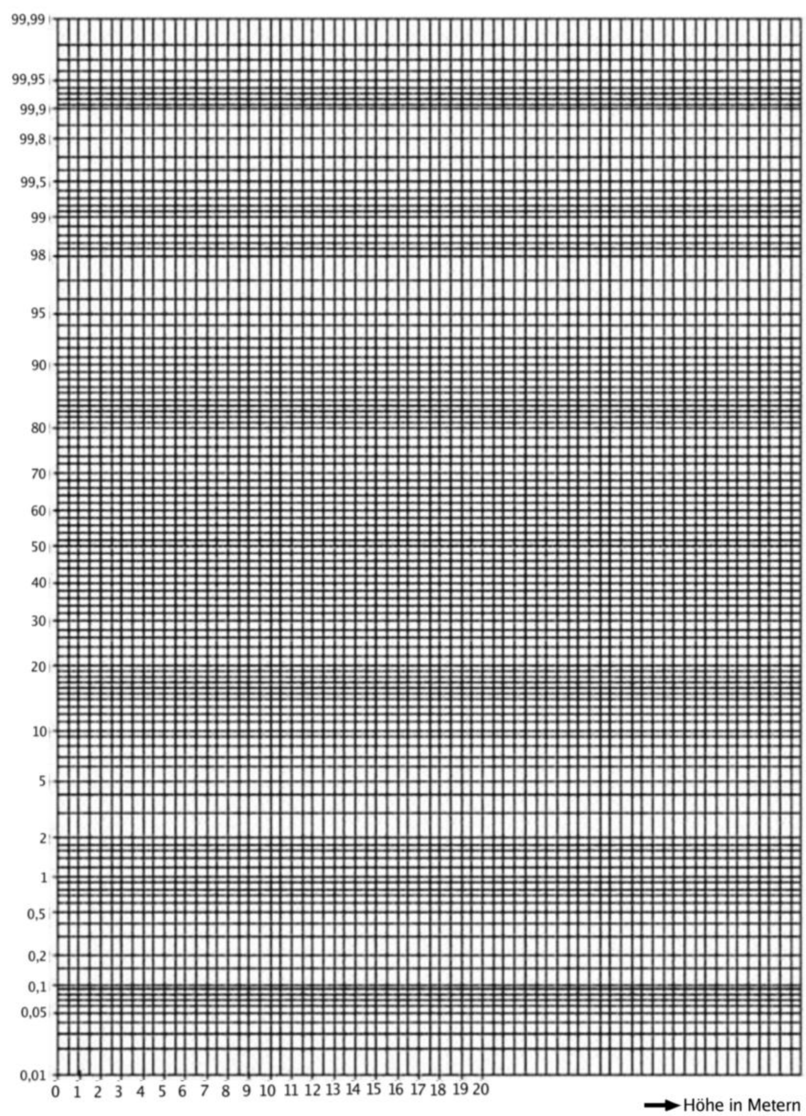
Zeige rechnerisch, dass auch bei den Sumpfmeisen ungefähr 15% in einer Höhe zwischen 6 und 8 Metern beobachtet wurden.

Anlagen zur Aufgabe 1

Anlage 1 (zur Frage 2)



Anlage 2 (zur Frage 3)



Aufgabe 2: Reisen

Die Gesellschaft „Reisefreunde“ organisiert Urlaubsreisen, die ausschließlich für ihre Mitglieder zugänglich sind. Die Gesellschaft hat drei Arten von Mitgliedern: neue Mitglieder, normale Mitglieder und bevorzugte Mitglieder. Bis vor einigen Jahren galten für eine Mitgliedschaft folgende Regeln:

- Jede Mitgliedschaft gilt immer für ein ganzes Kalenderjahr.
- Bei allen Mitgliedern, die im letzten Jahr keine Reise gebucht haben, endet die Mitgliedschaft.
- Alle Mitglieder, die im letzten Jahr nur eine einzige Reise gebucht haben, werden (oder bleiben) normale Mitglieder.
- Alle Mitglieder, die im letzten Jahr zwei oder mehr Reisen gebucht haben, werden (oder bleiben) bevorzugte Mitglieder.

Am Ende jedes Jahres wird jeweils überprüft, wie viele Reisen ein Mitglied gemacht hat. Wird die Mitgliedschaft einer Person für beendet erklärt, so wird sofort zu Beginn des neuen Kalenderjahres dafür ein neues Mitglied aufgenommen. Die Gesamtzahl der Mitglieder bleibt daher konstant.

Auf Grund jahrelanger Erfahrung hat man die folgende Übergangsmatrix M aufgestellt. Beachte, dass es sich bei einigen Übergängen in Wirklichkeit um das Ersetzen von Mitgliedern durch neue Mitglieder handelt.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{von} \\ & & \begin{array}{ccc}\text{neu} & \text{normal} & \text{bevorz.}\end{array} \\ \text{nach} & \begin{array}{c}\text{neu}\\ \text{normal}\\ \text{bevorzugt}\end{array} & \begin{pmatrix} 0,16 & 0,40 & 0,10 \\ 0,48 & 0,46 & 0,41 \\ 0,36 & 0,14 & 0,49 \end{pmatrix} \end{array} = M$$

In der Matrix kann man zum Beispiel ablesen, dass 16% der neuen Mitglieder ein Jahr lang keine Reise buchen; am Ende des Jahres werden sie daher ersetzt. Von den bevorzugten Mitgliedern buchten 41% im letzten Jahr nur eine einzige Reise; dadurch werden sie wieder normale Mitglieder.

Das Element in der Matrix M^2, das zu „von neuem Mitglied nach bevorzugtem Mitglied“ gehört, entspricht nicht der Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes neues Mitglied zwei Jahre später ein bevorzugtes Mitglied ist.

Frage 5: (7 Punkte)

Weise dies nach, indem Du beides berechnest.

Mit Hilfe der Matrix M hat man berechnet, dass die Gesellschaft auf Dauer jedes Jahr 25% neue Mitglieder bekommt.

Frage 6: (5 Punkte)

Berechne, wie viel Prozent normale Mitglieder und wie viel Prozent bevorzugte Mitglieder die Gesellschaft dann auf Dauer hat.

Vor einigen Jahren beschloss die Mitgliederversammlung, die oben genannten Bestimmungen etwas flexibler zu gestalten. Seither gelten folgende Bestimmungen:

- Jede Mitgliedschaft gilt immer für ein ganzes Kalenderjahr.
- Bei allen Mitgliedern, die in den letzten beiden Jahren keine Reise gebucht haben, endet die Mitgliedschaft. Das gilt auch für diejenigen, die gerade erst ein Jahr Mitglied sind und in diesem Jahr keine Reise gebucht haben.
- Alle Mitglieder, die in den letzten beiden Jahren insgesamt nur eine einzige Reise gebucht haben, werden (oder bleiben) normales Mitglied.
- Alle Mitglieder, die in den letzten beiden Jahren insgesamt zwei oder mehr Reisen gebucht haben, werden (oder bleiben) bevorzugtes Mitglied.

Das Verfahren bezüglich Beendigung einer Mitgliedschaft und damit Aufnahme eines neuen Mitgliedes findet weiterhin am Ende jedes Jahres statt.

Eine Analyse der Buchungen der letzten Jahre liefert die folgende Tabelle 3. Sie enthält Informationen über die Anzahl gebuchter Reisen pro Mitglied in einem Jahr. Dabei wird unterschieden zwischen neuen, normalen und bevorzugten Mitgliedern, und darüber hinaus wird die Anzahl der im vorigen Jahr gebuchten Reisen einbezogen. Es ist dabei zu beachten, dass es möglich ist, dass ein bevorzugtes Mitglied im vorigen Jahr keine Reise gebucht hat, aber im Jahr davor mindestens zwei.

Tabelle 3

		neues M.	normales Mitglied		bevorzugtes Mitglied		
Reisen im Vorjahr			0	1	0	1	2
Reisen in diesem Jahr	0	15%	45%	35%	40%	20%	20%
	1	60%	40%	50%	35%	65%	45%
	≥ 2	25%	15%	15%	25%	15%	35%

Aus Tabelle 3 ergibt sich zum Beispiel, dass 60% der neuen Mitglieder ein Jahr später normale Mitglieder sind.

Frage 7: (5 Punkte)

Berechne mit Hilfe von Tabelle 3, wie viel Prozent der neuen Mitglieder zwei Jahre später bevorzugte Mitglieder sind.

Die Gesellschaft hat 462 Mitglieder, die sich am Anfang des Jahres 2002 wie folgt auf die verschiedenen Kategorien verteilen (siehe Tabelle 4):

Tabelle 4

	neue M.	normale M.		bevorzugte Mitglieder		
Anzahl Reisen 2001		0	1	0	1	≥ 2
Anzahl Mitglieder	48	140	120	44	80	30

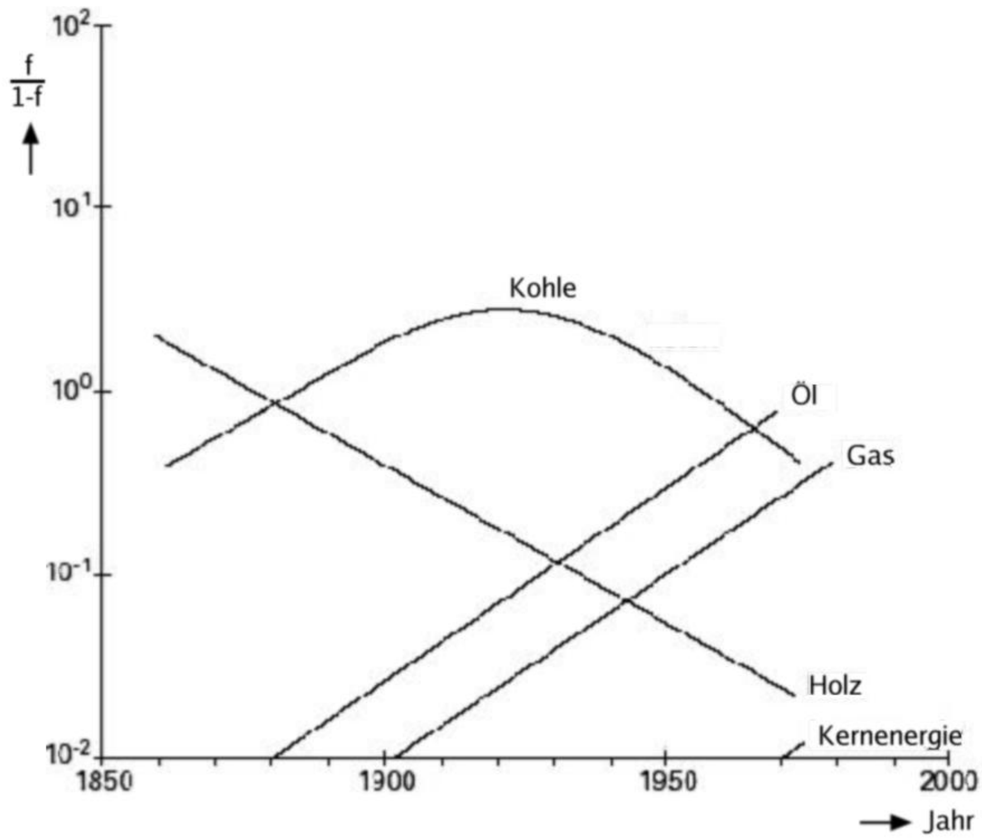
Frage 8: (5 Punkte)

Berechne, wie viel bevorzugte Mitglieder die Gesellschaft wahrscheinlich am 1. Januar 2003 hat.

Aufgabe 4: Energieträger

Holz war in früheren Zeiten die wichtigste Energiequelle. Zu Beginn des 19. Jahrhunderts wurde diese Rolle von der Kohle übernommen. In den letzten Jahren ist der Anteil von Erdöl und Erdgas am Energieverbrauch immer größer geworden. Im Buch „Energie, eine ökonomische Perspektive“ beschäftigen sich die Autoren Th. v. d. Klundert und H. Peer mit der Entwicklung der Energieträger. Sie gebrauchen dabei die Variable f für den Anteil eines Energieträgers am gesamten Energieverbrauch, wie er sich im Laufe der Zeit entwickelt hat. Für diesen Anteil f gilt: $0 \leq f \leq 1$. Dabei bedeutet $f = 0$, dass dieser Energieträger überhaupt nicht benutzt wird, und $f = 1$, dass ausschließlich dieser Energieträger verwendet wird.

In diesem Buch findet man eine Abbildung so wie hier Abbildung 2. Dadurch, dass nicht f sondern $\frac{f}{1-f}$ gebraucht wird und darüber hinaus auf der vertikalen Achse ein besonderer Maßstab verwendet wird, werden die meisten Graphen zu Geraden.



(Abbildung 2)

Frage 9: (3 Punkte)

In welchem Jahr hatte Holz einen Anteil von 50% am gesamten Energieverbrauch? Erläutere deine Antwort.

Mit Abbildung 2 haben die Autoren darüber informieren wollen, welche Bedeutung die verschiedenen Energieträger im Laufe der Zeit gehabt haben. Auffallend ist dabei, dass nicht f sondern $\frac{f}{1-f}$ gebraucht wird. Das ist möglich, weil zu jedem Wert von f genau ein Wert von $\frac{f}{1-f}$ gehört. Denn es gilt: wenn f zwischen 0 und 1 zunimmt, dann nimmt auch $\frac{f}{1-f}$ zu.

Frage 10: (4 Punkte)

Weise die letzte Behauptung mit der Ableitung von $\frac{f}{1-f}$ nach.

Mit der Abbildung 2 kann man für f_{Holz} und $f_{\text{Erdöl}}$, d.h. für den Anteil von Holz bzw. Erdöl am gesamten Energieverbrauch, die folgenden Formeln herleiten:

$$\frac{f_{\text{Holz}}}{1-f_{\text{Holz}}} = 3,03 \cdot 0,96^t \qquad \text{und} \qquad \frac{f_{\text{Erdöl}}}{1-f_{\text{Erdöl}}} = 0,0023 \cdot 1,05^t$$

In diesen Formeln gibt t die Anzahl der Jahre an mit $t = 0$ am 1. Januar 1850.

Frage 11: (5 Punkte)

Berechne mit Hilfe dieser Formeln, in welchem Jahr der Anteil von Holz genauso groß war wie der Anteil von Erdöl.

Mit Hilfe von Abbildung 2 können wir ebenso für f_{Erdgas}, den Anteil von Erdgas am gesamten Energieverbrauch, eine derartige Formel herleiten:

$$\frac{f_{\text{Erdgas}}}{1-f_{\text{Erdgas}}} = a \cdot g^t$$

Auch hier bedeutet t wieder die Anzahl der Jahre mit $t = 0$ am 1. Januar 1850.

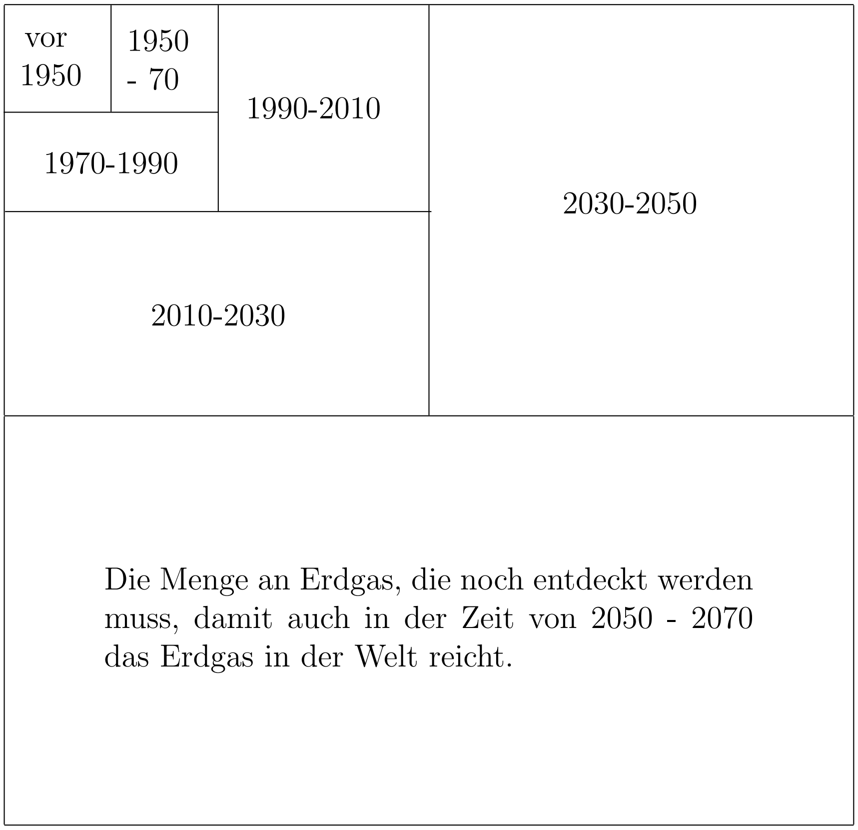
Frage 12: (4 Punkte)

Bestimme die Konstanten a und g.

Die Erdölvorräte gehen zu Ende, und der Kohleverbrauch hat viele Umweltprobleme zur Folge. Daher erwartet man, dass der Verbrauch von Erdgas in Zukunft ständig zunehmen wird. Schon seit Jahren steigt der Erdgasverbrauch jährlich um 3,5%. Man geht davon aus, dass sich das in nächster Zeit nicht ändern wird.

Diese Zunahme bedeutet, dass die heutigen Erdgasreserven bis ins Jahr 2050 reichen werden. Damit der Welt auch nach 2050 noch ausreichend Erdgas zur Verfügung steht, müssen neue Vorräte entdeckt werden. Um einen Eindruck davon zu bekommen, was das letzte bedeutet, befindet sich im Buch „An den Grenzen vorbei“ die folgende Abbildung. In dieser Abbildung 3 gibt jedes Rechteck die verbrauchte bzw. erforderliche Menge Erdgas für einen bestimmten Zeitraum an.

Abbildung 3



Frage 13: (5 Punkte)

Erläutere mit einer Rechnung, wie man in der Abbildung erkennen kann, dass der Verbrauch von Erdgas jährlich um $3,5\%$ steigt.

Aufgabe 4: Jungen oder Mädchen

Im Jahre 1988 fand die „Onderzoek Gezinsvorming“ (eine Untersuchung zur Entwicklung der Familie) statt. Dabei wurde u.a. die Zusammenstellung von Familien untersucht (Anzahl der Kinder, Anzahl der Mädchen usw.). Man wagte anschließend auch eine Vorhersage, wie Familien in Zukunft zusammengesetzt sein würden. Dabei beschränkten sich die Forscher auf eine Vorhersage über die Familien von Frauen, die im Jahre 1960 geboren waren. Die Ergebnisse stehen in Tabelle 5.

Tabelle 5

Erwartete Familienzusammensetzung bei Frauen, die 1960 geboren sind (jeweils in % von allen Frauen)		
keine Kinder		18,5
1 Kind (insgesamt)		15,2
	1 Junge	7,9
	1 Mädchen	7,3
2 Kinder (insgesamt)		40,1
	2 Jungen	10,1
	1 Junge und 1 Mädchen	20,9
	2 Mädchen	9,1
3 Kinder (insgesamt)		18,2
	3 Jungen	2,5
	2 Jungen und 1 Mädchen	7,3
	1 Junge und 2 Mädchen	6,3
	3 Mädchen	2,1
4 oder mehr Kinder (insgesamt)		8,0
	ausschließlich Jungen	0,5
	ausschließlich Mädchen	0,5

Eine Familie sowohl mit Mädchen als auch mit Jungen nennt man eine „gemischte Familie“.

Frage 14: (3 Punkte)

Wie viel Prozent aller in 1960 geborenen Frauen wird nach Tabelle 5 eine gemischte Familie haben? Begründe Deine Antwort.

In der restlichen Aufgabe wird davon ausgegangen, dass es sich bei den Geburten jeweils um die Geburt eines einzigen Kindes handelt und nicht um die Geburt von Zwillingen, Drillingen usw.

Aus Bevölkerungsstatistiken in den Niederlanden und anderen westeuropäischen Ländern seit dem 18. Jahrhundert geht deutlich hervor, dass immer etwas mehr Jungen als Mädchen geboren werden. Nimm an, dass die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Jungen bei jeder Geburt 0,51 beträgt, und dass an einem bestimmten Tag bei einem Standesbeamten

34 Geburten angemeldet werden.

Frage 15: (4 Punkte)

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass an diesem Tag genauso viel Jungen wie Mädchen angemeldet werden.

In der Vergangenheit haben viele nach Gründen gesucht, die das Geschlecht eines Kindes beeinflussen könnten. Einer der Gründe, die möglicherweise von Bedeutung sind, ist der Hormonspiegel der Eltern. Einen Hinweis hierauf gibt, was man über Geburten nach einer Hormonbehandlung herausbekommen hat. Bei 900 derartigen Geburten kamen 412 Jungen zur Welt.

Frage 16: (7 Punkte)

Untersuche, ob man daraus schließen kann, dass bei derartigen Geburten die Wahrscheinlichkeit für einen Jungen kleiner als 0,51 ist. Benutze ein Signifikanzniveau von 1%.

Aufgabe 5: Aktionswochen im Frühling

Ein Supermarkt führt jedes Jahr im Frühjahr eine Sonderaktion mit der Bezeichnung „Aktionswochen im Frühling“ durch. Während dieser Aktion erhält jeder Kunde bei einem Einkauf von mindestens 50 € zwei Lose. Auf jedem Los befindet sich ein kleines Feld. Wenn man dieses Feld „aufrubbelt“, wird die Abbildung eines Kiebitzeies, eines kleinen Lammes, einer Narzisse oder einer Vogelscheuche sichtbar. Der Kunde muss sofort an der Kasse, noch bevor er den Supermarkt verlässt, die zwei aufgerubbelten Lose abliefern. Wenn auf beiden Losen dieselbe Abbildung steht, erhält der Kunde einen Gutschein. Die Wahrscheinlichkeit, einen Gutschein zu erhalten, hängt von der Verteilung der vier Abbildungen auf die Lose ab.

Nimm an, dass die Vogelscheuche auf 10% der Lose vorkommt und die anderen drei Abbildungen auf jeweils 30% der Lose. Die Lose liegen in zufälliger Reihenfolge auf einem Stapel an der Kasse. Ein Kunde hat soeben zwei Lose erhalten.

Frage 17: (3 Punkte)

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Kunde mit diesen beiden Losen einen Gutschein gewinnt.

Der Besitzer des Supermarktes will nicht zu viele Gutscheine ausgeben. Daher überlegt er, ob eine andere Verteilung der Abbildungen auf die Lose günstiger ist. Er geht dabei davon aus, dass die Vogelscheuche mit einer Wahrscheinlichkeit von k auf den Losen vorkommt und die übrigen drei Abbildungen jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}k$. Damit kann er ausrechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Kunde mit zwei Losen einen Gutschein gewinnt. Die Wahrscheinlichkeit beträgt:

$$P(\text{Gutschein}) = 1\frac{1}{3}k^2 - \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}$$

Frage 18: (5 Punkte)

Zeige, dass die Formel für P(Gutschein) richtig ist.

Mit Hilfe dieser Formel kann der Besitzer des Supermarktes nun untersuchen, für welchen Wert von k die Wahrscheinlichkeit, einen Gutschein zu gewinnen, am geringsten ist.

Frage 19: (4 Punkte)

Führe diese Untersuchung durch.

1.2 Hinweise und Lösungen zum Examen VWO 2002

Hinweise zur Aufgabe „Vögel, die Futter suchen“

Themenbereiche: Darstellungen im Koordinatensystem, Stochastik

	Lernvoraussetzungen	**Bemerkungen**
Frage 1/2	Darstellungen im KS (Weg-Zeit-Diagramme auswerten und erstellen)	einfach, ab Klasse 8 möglich, evtl. Sprungstellen ungewohnt
Frage 3	Verwendung von Wahrscheinlichkeitspapier, Nachweis einer Normalverteilung	Wahrscheinlichkeitspapier ist nicht üblich in NRW
Frage 4	Berechnung einer Intervallwahrscheinlichkeit bei einer normalverteilten Zufallsgröße	kurze Standardaufgabe

Kommentar:

Der Kontext ist neuartig, interessant und realistisch. Das in der Aufgabe behandelte Verhalten von Vögeln kommt so in der Natur vor, wenn auch die Zahlenwerte für die Bearbeitung vereinfacht wurden. Vögel zeigen die in Frage 1 und 2 erwähnten Bewegungsmuster, da sie häufiger stehen bleiben, um ihre Umgebung zu beobachten, sich zu tarnen, die Folgen der durch ihre Bewegung ausgelösten Erschütterungen zu beobachten (Auftauchen von Würmern, ...) usw. Die Tierarten nutzen auch – was in Frage 3 und 4 angesprochen wird – ihre Umwelt sehr individuell, was Tageszeit, Bäume, Futterhöhe usw. angeht. Sie schließen dadurch auch Konkurrenz aus (‚Ökologische Nische‘).

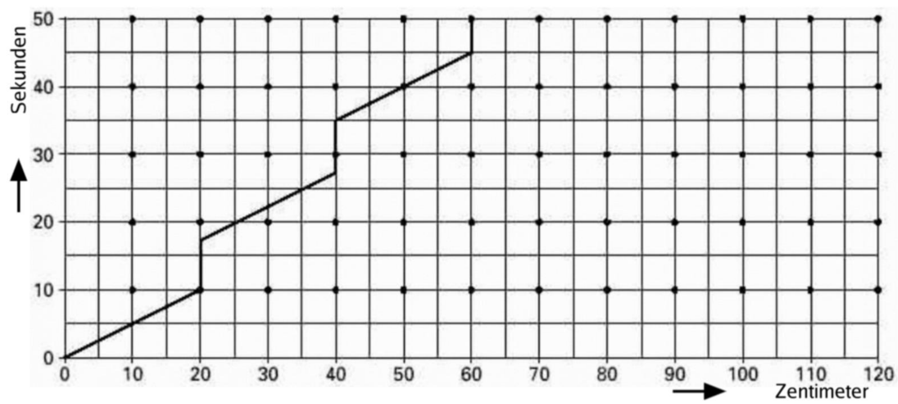
Einige Hinweise zum Wahrscheinlichkeitspapier: Im Wahrscheinlichkeitspapier wird die y-Achse des kartesischen Koordinatensystems verzerrt. Jeder y-Wert auf der y-Achse erhält den Wert $y^* = 100 \cdot \Phi(y)$. Trägt man in dieses neue Koordinatensystem die kumulierten relativen Häufigkeiten ein, so erhält man (näherungsweise) eine Gerade, wenn die Zufallsgröße (näherungsweise) normalverteilt ist. Auch lassen sich aus dem Graphen μ und σ leicht ablesen. Ausführliche Darstellungen zum Wahrscheinlichkeitspapier finden sich in vielen älteren Lehrbüchern der Stochastik (wie z.B. Heigl-Feuerpfeil, bsv 1987 / Schwann 1979 / Lambacher-Schweizer 1977).

Lösung der Aufgabe „Vögel, die Futter suchen“:

Frage 1	• Das Stillstehen dauert jedes Mal 5 Sekunden.	1
max. 4 Punkte	• Zwischen zwei Stopps werden 15 cm zurückgelegt.	1
	• Die Zeit zwischen zwei Stopps beträgt 2,5 Sekunden.	1
	• Die Geschwindigkeit beträgt 6 cm pro Sekunde.	1

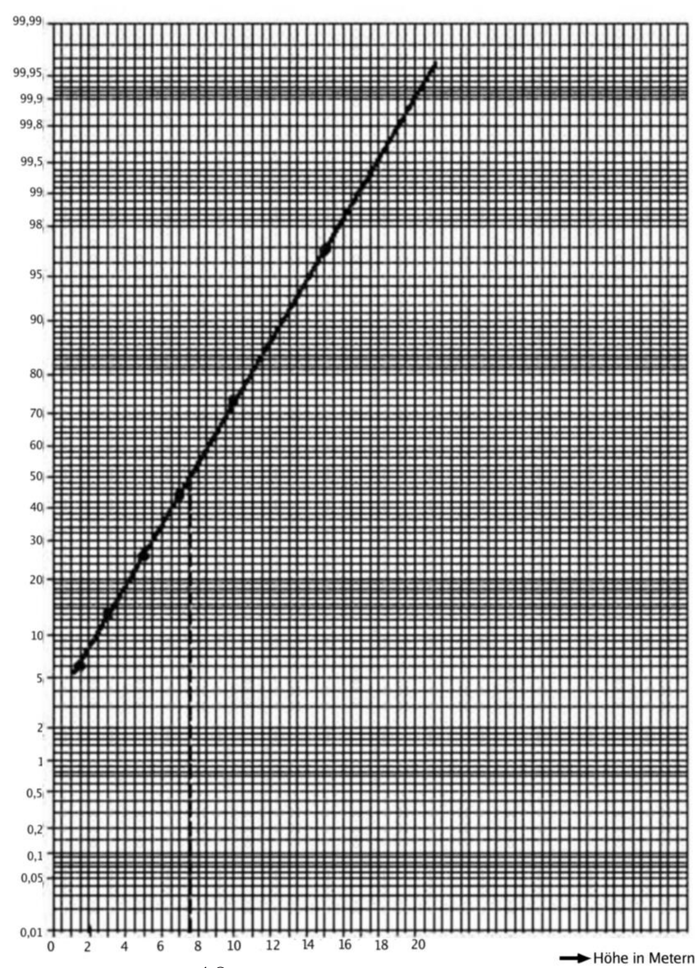
Frage 2
max. 5 Punkte

- Das Stillstehen dauert jedes Mal 7,5 Sekunden. 1
- Zwischen zwei Stopps werden 20 cm zurückgelegt. 1
- Das Laufen dauert jeweils 10 Sekunden. 1
- Der Graph 2



Frage 3
max. 8 Punkte

- Die kumulierten Prozentzahlen sind: 6, $12\frac{1}{2}$, $25\frac{1}{4}$, $43\frac{1}{4}$, $73\frac{3}{4}$, $96\frac{3}{4}$ und 100. 2
- die Zeichnung auf Wahrscheinlichkeitspapier 2



- die Feststellung, dass die Punkte näherungsweise auf einer Geraden liegen. 1
- das Ablesen von $\mu \approx 7,6$ 1
- das Ablesen von $\sigma \approx 4,0$ 1
- die Angabe einer Begründung für das Ablesen, z.B. durch gestrichelte Linien. 1
- Falls der Graph nicht über die rechte Klassengrenze 15 hinausgeht, wird ein Punkt abgezogen. 1

Frage 4

max. 4 Punkte

Lösung ohne Graphischen Taschenrechner

- Für 8 Meter ergibt sich $z \approx 2,33$. 1
- Für 6 Meter ergibt sich $z = 1$. 1
- $\Phi(2,33) \approx 0,9901$ und $\Phi(1) \approx 0,8413$ 1
- Es ergeben sich damit $14,9\%$ (oder 15%). 1

alternativ: Lösung mit Graphischem Taschenrechner

- Angabe der richtigen statistischen Funktion mit korrekt eingesetzten Werten 2
- Die Ergebnisse $14,9\%$ (oder 15%) 2

Hinweise zur Aufgabe „Reisen"

Themenbereiche: Matrizenrechnung, Fixpunkte, Grenzmatrizen, relative/absolute Häufigkeiten, elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

	Lernvoraussetzungen	**Bemerkungen**
Frage 5	Interpretation einer Übergangsmatrix, Rechnen mit relativen Häufigkeiten, Multiplikation von Matrizen, elementare Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	Interpretation eines mathematischen Modells, Festlegung von Grenzen des Modells
Frage 6	Bestimmung eines Fixpunktes bzw. Eigenvektors einer Matrix durch Lösen linearer Gleichungen, Wahrscheinlichkeitsrechnung	Lösungsvorschlag ist experimentell aber nicht mathematisch vollständig
Frage 7	elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung	Interpretation von Tabellen, Informationsentnahme aus Texten, Lesekompetenz
Frage 8	Berechnung absoluter Häufigkeiten mit Hilfe relativer Häufigkeiten, elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung	

Kommentar:

Die mathematische Anwendung wirkt konstruiert und nicht authentisch. Die Aufgabenstellung und der Lösungsweg sind sehr geschlossen.

Lösung der Aufgabe „Reisen":

Frage 5
max. 7 Punkte

- Berechnung des Matrixelements von M^2:

  $0,16 \cdot 0,36 + 0,48 \cdot 0,14 + 0,36 \cdot 0,49$ 2

- $= 0,3012$ 1

- P(ein neues Mitglied wird nach zwei Jahren bevorzugtes Mitglied)
  = P(ein neues Mitglied wird nach einem Jahr bevorzugtes Mitglied und bleibt es auch nach zwei Jahren)
  + P(ein neues Mitglied wird nach einem Jahr ein normales Mitglied und dann nach zwei Jahren ein bevorzugtes Mitglied)
  2

- P(ein neues Mitglied wird nach zwei Jahren bevorzugtes Mitglied)
  $= 0,36 \cdot 0,49 + 0,48 \cdot 0,14 = 0,2436$ 2

Frage 6
max. 5 Punkte

- Erkenntnis, dass gelten muss:

$$M \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ x \\ 75 - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ x \\ 75 - x \end{pmatrix}$$

2

- Es gilt also: $0,16 \cdot 25 + 0,4 \cdot x + 0,1 \cdot 75 - 0,1 \cdot x = 25$ 1

- Für x ergibt sich 45, also 45% normale Mitglieder. 1

- Es ergeben sich also $100 - 25 - 45 = 30$ bevorzugte Mitglieder, also 30%. 1

Ein alternativer Lösungsweg wäre:

- Erkenntnis, dass eine genügend hohe Potenz von M berechnet werden muss 1

- Berechnen (z.B. mit dem grafischen Taschenrechner) von z. B.

$$M^{25}$$ 2

- Schlussfolgerung, dass aufgrund übereinstimmender Spalten Stabilität erreicht ist, d. h. eine Grenzmatrix vorliegt. 1

- Schlussfolgerung, dass es erst für diesen Fall 45% normale Mitglieder und 30% bevorzugte Mitglieder gibt. 1

Frage 7
max. 5 Punkte

- P(neues Mitglied ist zwei Jahre später bevorzugtes Mitglied)
  = P(neues Mitglied ist nach einem Jahr ein bevorzugtes Mitglied und bleibt es auch nach dem zweiten Jahr)
  = P(neues Mitglied bucht in dem ersten Jahr zwei Reisen)
  = 0,25 2

- P(ein neues Mitglied wird nach einem Jahr normales Mitglied, nach dem zweiten Jahr ein bevorzugtes Mitglied)
  $= 0,6 \cdot 0,65 = 0,39$ 2

- P (ein neues Mitglied wird nach zwei Jahren ein bevorzugtes Mitglied)
  $= 0,25 + 0,39 = 0,64$ 1

Frage 8
max. 5 Punkte

- P(neues Mitglied ist nach einem Jahr ein bevorzugtes Mitglied)
  $= 0,25 \cdot 48 = 12$ 1

- P(normales Mitglied ist nach einem Jahr ein bevorzugtes Mitglied)
  $= 0,15 \cdot 140 + (0,50 + 0,15) \cdot 120 = 21 + 78 = 99$ 1

- P(bevorzugtes Mitglied ist weiterhin ein bevorzugtes Mitglied)
  $= 0,25 \cdot 44 + (0,65 + 0,15) \cdot 80 + (0,2 + 0,45 + 0,35) \cdot 30$
  $= 105$ 2
- Gesamtzahl der bevorzugten Mitglieder : 216 1

Hinweise zur Aufgabe „Energieträger“

Themenbereiche: Exponentialfunktionen, Auswertung von Graphiken, Ableitungsregeln

	Lernvoraussetzungen	**Bemerkungen**
Frage 9	Ablesen einer logarithmischen Skala, Übertragung der Angaben von f in $\frac{f}{1-f}$, dann sind nur noch einfache Gleichungen zu lösen	Grafik für deutsche Schüler anspruchsvoll, weil wenig verwendet (log. Skala, die durch Ablesen zu bewältigen ist)
Frage 10	Anwenden von Ableitungsregeln (Quotientenregel), alternativ: Argumentation mit Hilfe des Monotonieverhaltens	Schwierigkeit: die eigentliche Funktion f wird durch den Quotienten ersetzt, hier muss erkannt werden, dass $\frac{d}{df}$ gebildet werden kann.
Frage 11	Rechnen mit Exponentialgleichungen	mit oder ohne GTR zu lösen, Ablesen von zwei Punkten oder Gleichsetzen der Funktionsterme
Frage 12	Ablesen in der Grafik, dass die Geraden parallel verlaufen, Lösen einer linearen Gleichung	ungewohnt: das Ablesen in Grafiken als Lösungsmethode zu akzeptieren
Frage 13	Feststellen des Wachstumsfaktors aus der Prozentangabe, Erkennen der Flächenargumentation als Verdoppelung und Berechnen der Verdoppelungszeit	keine

Kommentar:

Dies ist eine sehr interessante Aufgabe, die sicheres Umgehen mit Verfahren der Analysis erfordert.

Das Thema Energieträger ist authentisch. Der Verweis auf die Originalliteratur verstärkt den Bezug zur Realität. An einem Kontext, wie dem hier dargestellten, erscheint es sinnvoll und möglich, insbesondere Grundkursschülern die Notwendigkeit aufzuzeigen, Mathematik zu treiben. Dabei lernen sie, mathematische Argumentationen zu verstehen und angemessen zu interpretieren. Im Vergleich können andere Modelle zur Endlichkeit unserer fossilen Energiequellen herangezogen werden.

Lösung der Aufgabe „Energieträger“:

Frage 9
max. 3 Punkte

- f_{Holz} soll $0,5$ sein, 1
- also ergibt sich $\dfrac{f}{1-f} = 1$. 1
- Ablesen bei 10^0 liefert das Jahr 1877 (oder 1875, 1876, 1878 oder 1879) 1

Frage 10
max. 4 Punkte

- Die Ableitung von $\dfrac{f}{1-f}$ nach f ist $\dfrac{1}{(1-f)^2}$. 2
- Sie ist für alle f (solange $0 \leq f < 1$ ist) positiv. 1
- Das bewirkt, dass auch die neue Quotienten-Funktion monoton wachsend ist. 1
- Betrachtet man hier $q(f(t))$ und leitet mit Quotientenregel ab, so kommt man zum selben Ergebnis. 1

Frage 11
max. 5 Punkte

- Gleichsetzen von $\dfrac{f_{\text{Holz}}}{1-f_{\text{Holz}}}$ und $\dfrac{f_{\text{Erdöl}}}{1-f_{\text{Erdöl}}}$ liefert
  $3,03 \cdot 0,96^t = 0,0023 \cdot 1,05^t$. 1
- $\left(\dfrac{0,96}{1,05}\right)^t = \dfrac{0,0023}{3,03}$ 1
- $t = \dfrac{\log\left(\dfrac{0,0023}{3,03}\right)}{\log\left(\dfrac{0,96}{1,05}\right)}$ 1
- $t \approx 80,2$ 1
- Das führt auf das Jahr 1930. 1

oder mit GTR

- Eingabe der Funktionsterme zu $y = 3,03 \cdot 0,96^t$ und
  $y = 0,0023 \cdot 1,05^t$ 2
- Bestimmung des Schnittpunktes der Graphen ergibt $t \approx 80,2$ 2
- Das führt auf das Jahr 1930. 1

Frage 12
max. 4 Punkte

- g wird bestimmt durch die Erkenntnis, dass in der Grafik die Gerade zu f_{Erdgas} parallel zur Geraden zu $f_{\text{Erdöl}}$ verläuft, g also denselben Wachstumsfaktor haben muss, $g = 1,05$. 2

- a läßt sich dann mit Hilfe von abgelesenen Werten berechnen:
  z. B. $\frac{f_{\text{Erdgas}}}{1 - f_{\text{Erdgas}}} = \frac{1}{100}$ bei etwa 52 Jahren. 1

- Daraus ergibt sich $a = \frac{10^{-2}}{1,05^{52}} \approx 0,0008$. 1

oder

- Nach Ablesen von zwei Punkten z. B. $(1902|10^{-2})$ und $(1950|10^{-1})$ ergint sich als Wachstumsfaktor für 48 Jahre der Wert 10, 1

- also $g = 10^{\frac{1}{48}} \approx 1,05$. 1

- Zum Jahr 1902 gehört der Wert 10^{-2}, also $10^{-2} = a \cdot 1,05^{52}$. 1

- $a = \frac{10^{-2}}{1,05^{52}} \approx 0,0008$ 1

Frage 13
max. 5 Punkte

- Bei $3,5\%$ Wachstum pro Jahr ist der Wachstumsfaktor $1,035$. 1

- Das ergibt einen Wachstumsfaktor von etwa 2 in zwanzig Jahren. 1

- Der Gasverbrauch eines Zeitraumes von 20 Jahren hat sich in der nächsten Periode also verdoppelt. 2

- In Abbildung 3 ist jedes folgende Rechteck tatsächlich doppelt so groß wie das vorhergehende. 1

oder

- In Abbildung 3 ist jedes Rechteck doppelt so groß wie das vorhergehende. 1

- Also verdoppelt sich der Gasverbrauch in einem Zeitraum von etwa 20 Jahren. 2

- Der Wachstumsfaktor für etwa 20 Jahre ist ungefähr 2. 1

- Das bedeutet einen Wachstumsfaktor von $1,035$ pro Jahr, was mit einem Anstieg von $3,5\%$ pro Jahr übereinstimmt. 1

Hinweise zur Aufgabe „Jungen oder Mädchen“

Themenbereiche: Stochastik – Schwerpunkt, Binomialverteilung

	Lernvoraussetzungen	**Bemerkungen**
Frage 14	Informationsentnahme aus Tabellen	elementare Aufgabe; genaue Beachtung der Bedeutung der Tabellenwerte ist erforderlich
Frage 15	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei B(n,p)-verteilten Zufallsvariablen mit TR, GTR oder lokaler Näherungsformel	Standardaufgabe ohne Schwierigkeiten
Frage 16	Einseitiger Hypothesentest; numerische Bearbeitung auf unterschiedliche Arten möglich	Standardaufgabe, deren Schwierigkeiten in der numerischen Bearbeitung liegen; die Modellierung ist in der Aufgabenstellung explizit vorgegeben

Kommentar:

Die Aufgabe verlangt die Anwendung von Algorithmen, die in der Regel geübt sind. Die umfassende Darstellung des Kontexts gibt der Aufgabe eine gewisse Authentizität, erschwert aber die Bearbeitung in keiner Weise. Aus diesem Kontext heraus lassen sich leicht weitere Fragestellungen (z. B. das Problem der Ein-Kind-Ehe in Asien, Methoden der Prognose etc.) entwickeln.

Lösung der Aufgabe „Jungen oder Mädchen“:

Frage 14
max. 3 Punkte

- Prozentsätze $20,9$; $7,3$ und $6,3$ — 1
- Prozentsatz 7 — 1
- Antwort 41,5 — 1

Frage 15
max. 4 Punkte

- Anwendung der Binomialverteilung mit $n = 34$ und $p = 0,51$ — 1
- Wahrscheinlichkeit pro Möglichkeit $0,51^{17} \cdot 0,49^{17}$ — 1
- Anzahl der Möglichkeiten $\binom{34}{17}$ — 1
- Antwort $0,1349$ (oder 13%) — 1

oder

- Bei Gebrauch des GTR : Einstellung auf die nicht-kumulative Binomialverteilung mit $P(X = 17)$ 2
- $n = 34$ und $p = 0,51$ 1
- Antwort: $0,1349$ 1

Bemerkung: Kein Punktabzug bei Benutzung der Normalapproximation.

Frage 16
max. 7 Punkte

- Aufstellen des Modells, in dem die Hypothese $p = 0,51$ gegen $p < 0,51$ getestet wird 1
- Erkennen, dass $P(X = 412 \,|\, n = 900$ und $p = 0,51)$ zu berechnen ist 1
- $\mu = 0,51 \cdot 900 = 459$ 1
- $\sigma = \sqrt{900 \cdot 0,51 \cdot 0,49} = 15$ 1
- $x = 412,5$ liefert $z = -3,1$ 1
- $\Phi(-3,1) = 0,001$ 1
- Die Schlussfolgerung ist gerechtfertigt wegen $0,001 < 0,01$ 1

oder

- Aufstellen des Modells, in dem die Hypothese $p = 0,51$ gegen $p < 0,51$ getestet wird 1
- Der kritische Bereich besteht aus allen k mit
  $P(X \leq k \,|\, n = 900,\, p = 0,51) < 0,01$ 1
- $\mu = 0,51 \cdot 900 = 459$ 1
- $\sigma = \sqrt{900 \cdot 0,51 \cdot 0,49} = 15$ 1
- $\dfrac{k + \frac{1}{2} - 459}{15} < -2,33$ 1
- $k \leq 423$ 1
- Die Schlussfolgerung ist gerechtfertigt wegen $412 < 423$ 1

oder

- Aufstellen des Modells, in dem die Hypothese $p = 0,51$ gegen $p < 0,51$ getestet wird 1
- Erkennen, dass $P(X = 412 \,|\, n = 900$ und $p = 0,51)$ zu berechnen ist 1

- Bei Gebrauch des GTR: Aufschreiben der kumulativen Binomialverteilungsfunktion 3
- $\Phi(-3,1) = 0,001$ 1
- Die Schlussfolgerung ist gerechtfertigt wegen $0,001 < 0,01$ 1

Bemerkung: Wenn ohne Erläuterung das Menü „Test“ des GTR verwendet wird, dann sind höchstens 6 Punkte zu geben, sofern von einer Normalapproximation ohne Stetigkeitskorrektur Gebrauch gemacht wird.

Hinweise zur Aufgabe „Aktionswochen im Frühling“

Themenbereiche: Stochastik, Analysis

	Lernvoraussetzungen	**Bemerkungen**
Frage 17	Pfadregel	einfache Einstiegsaufgabe, bereits in der Sekundartufe I einsetzbar
Frage 18	Verallgemeinerung von Frage 17	binomische Formel
Frage 19	Extremwertbestimmung einer quadratischen Funktion	Einsatz ab Klasse 9 möglich

Kommentar:

Dies ist eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die eine Alltagssituation (Lose mit Gewinngutschein) beschreibt. Sie ist lösbar mit Kenntnissen der Mittelstufe (Pfadregel, Parabeleigenschaft). Bei der Extremwertbestimmung werden Kenntnisse der Analysis gefragt, sie bietet somit die Verbindung von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Analysis. Frage 18 dürfte durch die Vernetzung unterschiedlicher Themenfelder für viele Schüler anspruchsvoll sein. Hier bestimmt man die Abhängigkeit einer Wahrscheinlichkeitsfunktion von einer variablen Wahrscheinlichkeit.

Lösung der Aufgabe „Aktionswochen im Frühling “:

Frage 17
max. 3 Punkte

- Wahrscheinlichkeit $= P(2\cdot \text{ Kiebitzei}) + P(2\cdot \text{ Lamm})$
  $+ P(2\cdot \text{ Narzisse}) + P(2\cdot \text{Vogelscheuche})$ 1
- $P(\text{Gutschein}) = 0,3^2 + 0,3^2 + 0,3^2 + 0,1^2$ 1
- $P(\text{Gutschein}) = 0,28$ 1

Frage 18
max. 5 Punkte

- $P(\text{Gutschein}) = k^2 + 3\cdot(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}k)^2$ 2
- $= k^2 + 3\cdot(\frac{1}{9} - \frac{2}{9}k + \frac{1}{9}k^2)$ 1
- $= k^2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}k$ 1
- $= \frac{4}{3}k^2 - \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}$ 1

Frage 19
max. 4 Punkte

- $P(k) = \frac{4}{3}k^2 - \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}$; $P'(k) = \frac{8}{3}k - \frac{2}{3}$ 1
- $\frac{8}{3}k - \frac{2}{3} = 0$ 1
- $k = \frac{1}{4}$ 1
- Erläuterung dazu, dass tatsächlich ein Minimum bei $k = \frac{1}{4}$ vorliegt, z. B. durch den Hinweis darauf, dass der Graf von P eine nach oben geöffnete Parabel ist. 1

oder

- Der Graph von P ist eine nach oben geöffnete Parabel, also kann nur ein Minimum vorliegen. 1
- Dann gilt $k = -\frac{b}{2a}$, 1
- also $k = \frac{\frac{2}{3}}{2\frac{2}{3}}$. 1
- $k = \frac{1}{4}$ 1

oder

- Durch eine Zeichnung des Graphen von $y = \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ im Intervall $[0; 1]$ oder größer mit einem GTR 2
- mit Hilfe einer TRACE-Option den gesuchten Wert bestimmen, 1
- $k = \frac{1}{4}$ 1

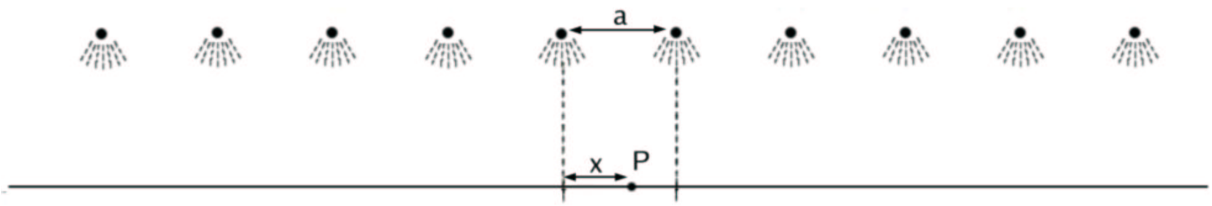
Bemerkung: Punktabzug bei anderen Ergebnissen als $k = \frac{1}{4}$ (oder $0,25$) durch Nutzung von dezimalen Näherungswerten. (-1 Punkt)

1.3 Weitere Aufgaben

Straßenbeleuchtung (Examen VWO 1998, Aufgabe 3)

Eine wichtige Anforderung, die an Straßenbeleuchtung gestellt wird, ist, dass es überall entlang des erleuchteten Weges ungefähr gleich hell ist, dass es also nicht z. B. in der Mitte zwischen zwei Straßenlaternen viel dunkler ist als unter einer Laterne.

Um anzugeben, wie hell es an einer bestimmten Stelle ist, gebraucht man den Begriff *Beleuchtungsstärke* (gemessen in *Lux*). Für einen neu anzulegenden Weg hat man verschiedene Möglichkeiten für den Abstand von zwei aufeinanderfolgenden Laternen untersucht. Für eine Anzahl von Punkten zwischen zwei Laternen hat man die Beleuchtungsstärke berechnet. Hierbei bedeutet a den Abstand zwischen zwei Laternen (in Metern), und x gibt an, wie viel Meter man von einem Punkt genau unter einer der Laternen entfernt ist. Siehe hierzu die folgende Abbildung:



(Abb. 1)

Die Ergebnisse der Berechnungen zeigt die nachfolgende Tabelle 1:

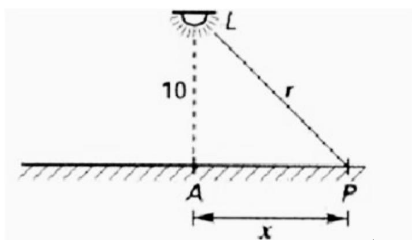
a x	6	8	10	12	14	16	18	20
0	321,1	245,4	199,7	170,5	151,2	138,0	128,8	122,3
1	321,2	245,2	199,3	169,8	150,2	136,9	127,6	121,0
2	321,2	244,8	198,0	167,8	147,6	133,7	124,1	117,3
3	321,2	244,3	196,5	165,0	143,8	129,2	119,0	111,7
4	321,2	244,1	195,3	162,4	139,7	124,0	113,0	105,2
5	321,2	244,3	194,8	160,4	136,1	119,0	106,9	98,4
6	321,1	244,8	195,3	159,7	133,7	114,9	101,6	92,1
7		245,2	196,5	160,4	132,8	112,3	97,4	86,8
8		245,4	198,0	162,4	133,7	111,4	94,8	82,8
9			199,3	165,0	136,1	112,3	93,9	80,4
10			199,7	167,8	139,7	114,9	94,8	79,5
11				169,8	143,8	119,0	97,4	80,4
12				170,5	147,6	124,0	101,6	82,8
13					150,2	129,2	106,9	86,8
14					151,2	133,7	113,0	92,1
15						136,9	119,0	98,4
16						138,0	124,1	105,2
17							127,6	111,7
18							128,8	117,3
19								121,0
20								122,3

Nach Tabelle 1 sorgt das Aufstellen von Laternen mit einem Abstand von sechs Metern für eine ideale gleichmäßige Beleuchtung. Das ist jedoch ökonomisch nicht machbar. Der Unterschied zwischen dem größten und dem kleinsten Wert der Beleuchtungsstärke sollte aber nicht mehr als 20% des größten Wertes betragen.

Frage 1: (4 Punkte)

Welche Werte von a in Tabelle 1 erfüllen diese Bedingung? Begründe deine Antwort.

Die Werte von Tabelle 1 wurden ermittelt, indem zuerst berechnet wurde, wie groß die Beleuchtungsstärke ist, die jede einzelne Lampe an einer bestimmten Stelle liefert, und danach wurden die Ergebnisse addiert. Zur Berechnung der Beleuchtungsstärke einer einzigen Lampe gebraucht man das folgende Modell. Ausgangspunkt ist eine Laterne, die 10 m über der Straße hängt, und deren Licht sich nach unten in alle Richtungen ausbreiten kann. Siehe hierzu die Abbildung 2:



(Abbildung 2)

Den Abstand der Lampe zu einem Punkt P auf der Straßendecke bezeichnen wir mit r (in Metern). Die Beleuchtungsstärke im Punkt P nennen wir S (in Lux). Für S gilt:

$$S = \frac{100\,000}{r^3}$$

Punkt A befindet sich genau unter der Lampe, x ist der Abstand in Metern zwischen Punkt A und Punkt P.

Frage 2: (5 Punkte)

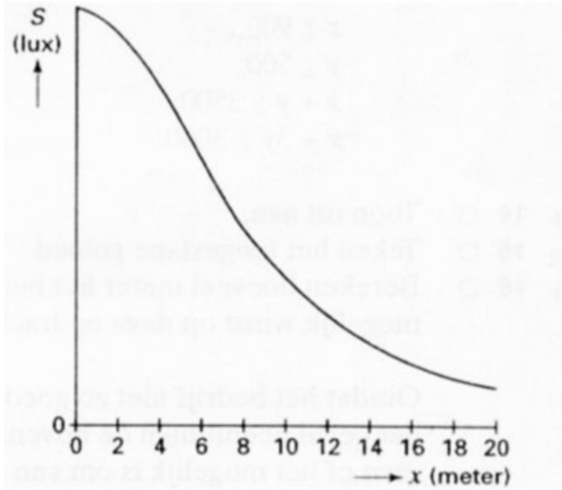
Berechne x für den Fall, dass die Beleuchtungsstärke in P halb so groß ist wie in A. Runde das Ergebnis auf ganze Dezimeter.

Man kann S auch als Funktion von x auffassen. Die Ableitung $\frac{dS}{dx}$ ist ein Maß für die Veränderung der Beleuchtungsstärke (in Lux/Meter), wenn man sich auf der Straße von Punkt A entfernt. Es gilt:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{-300\,000 \cdot x}{(100 + x^2)^2 \cdot \sqrt{100 + x^2}}$$

Frage 3: (5 Punkte)

Zeige, dass diese Gleichung gilt.



(Abbildung 3)

In Abbildung 3 ist der Graph von S als Funktion von x gezeichnet. Jemand fragt sich, ob es einen Punkt gibt, wo $\frac{dS}{dx}$ kleiner ist als -8 Lux/Meter. Er versucht vergeblich diese Frage durch das Auflösen einer Gleichung zu beantworten. Mit Hilfe von Abbildung 3 und mit der Gleichung von $\frac{dS}{dx}$ lässt sich recht schnell beweisen, dass es einen solchen Punkt gibt.

Frage 4: (3 Punkte)

Weise das nach.

Hinweise zur Aufgabe „Straßenbeleuchtung“

Themenbereiche: Analysis

	Lernvoraussetzungen	**Bemerkungen**
Frage 1	Auswertung einer Zahlentabelle: Prozentrechnung (Berechnung des Prozentsatzes)	einfache Einstiegsaufgabe (SI-Stoff)
Frage 2	Anwenden einer vorgegebenen physikalischen Formel, Satz von Pythagoras	Die Aufgabe verlangt nur SI-Stoff. Der Rechenaufwand ist gering. Es sind aber mehrere aufeinanderfolgende Rechenschritte zu organisieren.
Frage 3	Satz von Pythagoras, Rechnen mit rationalen Exponenten, Kettenregel, Ableitung von Funktionen mit rationalen Exponenten	Die Termumformungen sind nicht ganz einfach und verlangen Übersicht.
Frage 4	Auswertung eines Funktionsgraphen (Zusammenhang von Ableitung und Steigungsverhalten)	Die Aufgabe verlangt eine kleine Lösungsidee, sie ist keine Routineaufgabe. Beim Probieren ist u. U. auch einige Geduld nötig, wenn man nicht sofort einen günstigen x-Wert nimmt.

Kommentar:

Die Aufgabe zeigt viele Merkmale des Unterrichtes und der Abituranforderungen von Wiskunde A. Der Kontext ist sinnvoll und interessant: Der Abstand von Straßenlaternen zur Vermeidung dunkler Löcher ist sicher ein Thema, über das es sich nachzudenken lohnt und das durchaus auch mit Mathematik zu tun hat. Dabei werden mathematische Modelle nicht entwickelt, sondern vorgegeben (Frage 2: Formel für S).

Die Schüler müssen sehr genau einen längeren Text lesen, der die erforderlichen Informationen liefert. Das Lernen ist kumulativ angelegt: Weiter zurückliegender Stoff spielt in Aufgaben durchaus auch eine zentrale Rolle (Frage 1). Die Anschauung wird herangezogen (Frage 4), und es müssen Grafiken ausgewertet werden. Im Vordergrund stehen in den Aufgaben die Lösungsverfahren, der rechnerische Aufwand ist relativ gering. Zur erfolgreichen Lösung der Gesamtaufgabe wird vom Schüler nicht nur schematisches Vorgehen verlangt, sondern es sind an mehreren Stellen kleine „Ideen“ erforderlich.

Lösung der Aufgabe „Straßenbeleuchtung“:

Frage 1
max. 3 Punkte

- für $a = 16$ ist der Unterschied kleiner als 20% 2
- für $a = 18$ ist der Unterschied größer als 20% 1
- für $a = 6, 8, 10, 12, 14, 16$ 1

Frage 2
max. 5 Punkte

- In A gilt $S = 100$
- $r^3 = 2000$ 1
- $r = 2000^{\frac{1}{3}}$ (oder $r \approx 12,6$) 1
- Verwendung des Satzes von Pythagoras 1
- Antwort: $77\,\mathrm{dm}$ (oder $7,7\,\mathrm{m}$) 1

Frage 3
max. 5 Punkte

- $r = \sqrt{100 + x^2}$ 1
- $S = \dfrac{100\,000}{(100 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$ oder $S = 100\,000 \cdot (100 + x^2)^{-\frac{3}{2}}$ 1
- Ableitung von S und Ausrechnen bis zum Endergebnis

$$\frac{dS}{dx} = \frac{-300\,000 \cdot x}{(100 + x^2)^2 \cdot \sqrt{100 + x^2}}$$

1

oder

- $r = \sqrt{100 + x^2}$ 1
- $\dfrac{dS}{dr} = \dfrac{-300\,000}{r^4}$ 1
- $\dfrac{dr}{dx} = -\dfrac{x}{\sqrt{100 + x^2}}$ 2
- $\dfrac{dS}{dr} = \dfrac{dS}{dr} \cdot \dfrac{dr}{dx}$ und Ausrechnen bis zum Endergebnis

$$\frac{dS}{dx} = \frac{-300\,000 \cdot x}{(100 + x^2)^2 \cdot \sqrt{100 + x^2}}$$

1

Frage 4
max. 5 Punkte

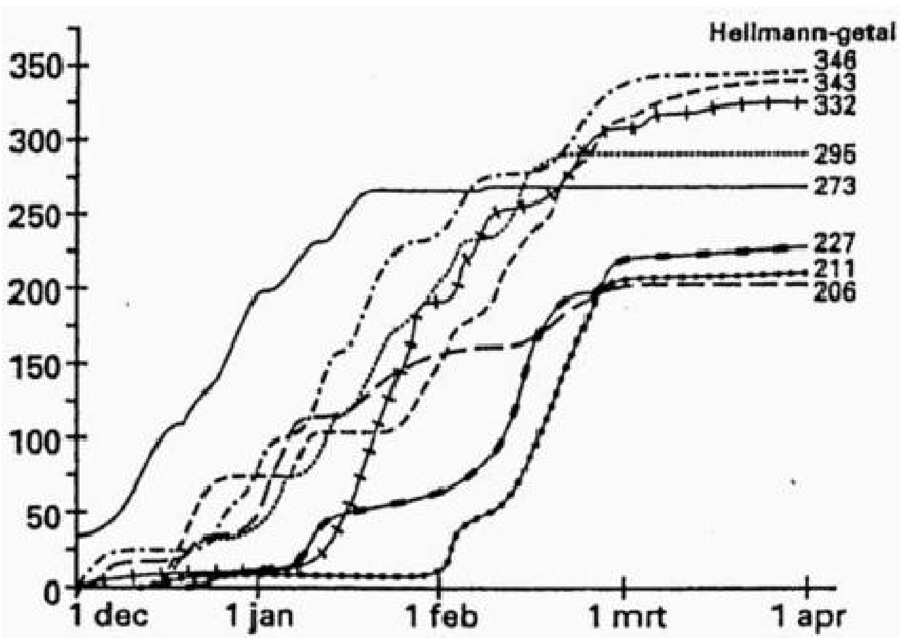
- Erkenntnis, dass ein spezieller Wert wie z. B. $S'(5)$ berechnet werden muss. 1
- Aus $S'(5) \approx -8,6$ folgt eine Antwort auf die gestellte Frage. 1

Winter (Examen VWO 1994, Aufgabe 1)

Um zu sehen, ob ein Winter „kälter“ gewesen ist als ein anderer, betrachtet man die Temperaturen in der Zeit vom 1. November bis zum 31. März.

Zur Berechnung der sogenannten „Hellmann-Zahl“ eines Winters benutzt man die mittlere Tagestemperatur. Tage, an denen diese Temperatur $0°C$ oder höher ist, werden nicht berücksichtigt; nur Tage mit einer Durchschnittstemperatur unter $0°C$ zählen. Beträgt die mittlere Tagestemperatur z. B. $-3.8°C$, dann liefert dieser Tag einen Beitrag von 3.8 zur Hellmann-Zahl. Das Minuszeichen der Temperatur wird also weggelassen. Die so erhaltenen positiven Werte werden aufsummiert. Als Endergebnis erhält man die Hellmann-Zahl.

Die Abbildung 1 zeigt für die acht kältesten Winter aus dem Zeitraum von 1890 bis 1984, wie die Hellmann-Zahl zustande gekommen ist.



(Abbildung 1)

Zu diesen acht kältesten Wintern gehören die Winter 1890-1891, 1941-1942 und 1955-1956.

Frage 1: (3 Punkte)

Nenne die Hellmann-Zahlen von diesen drei Wintern. Benutze dazu Abbildung 1 und die folgenden Angaben:

- Ein ganz besonderer Winter war der von 1890-1891. Die strenge Kälte herrschte vor allem im Monat Dezember.
- Auffallend spät begann der Kriegswinter 1941-1942 und wurde dann doch noch einer der drei kältesten Winter.
- In einigen Jahren gab es den Wintereinbruch erst im Februar. Ein Beispiel dafür ist der Winter 1928-1929 und in noch extremerem Maße der von 1955-1956. In jenem Winter war mit Ausnahme vom Februar von Frost kaum die Rede.

Um verschiedene Winter zu vergleichen, benutzen Metereologen auch die sogenannte

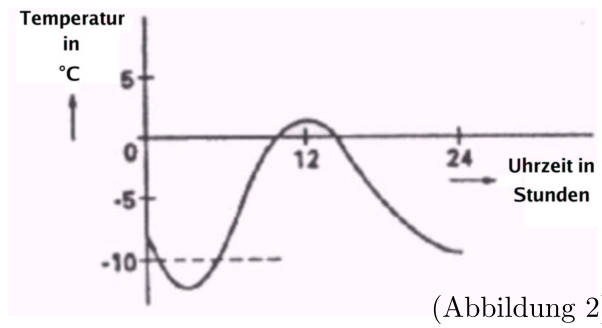
„Frostzahl“ eines Winters. Bei der Berechnung dieser Frostzahl berücksichtigt man aber nicht die mittlere Tagestemperatur. Stattdessen geht man für jeden Tag zwischen dem 1. November und dem 31. März folgenden Fragen nach:

War die Minimumtemperatur niedriger als $0°C$? Falls ja, dann wird dieser Tag als *Frosttag* gezählt.

War die Temperatur am ganzen Tag niedriger als $0°C$? Falls ja, dann wird dieser Tag als *Eistag* gewertet.

War die Minimumtemperatur $-10°C$ oder niedriger? Falls ja, dann wird dieser Tag als *sehr kalter Tag* gezählt.

Ein *Frosttag* kann daher auch noch als ein *Eistag* und/oder als ein *sehr kalter Tag* gerechnet werden. Dafür gibt es insgesamt vier Möglichkeiten. Abbildung 2 zeigt den Temperaturverlauf bei einer dieser Möglichkeiten, nämlich an einem Frosttag, der auch ein sehr kalter Tag, aber kein Eistag ist.



(Abbildung 2)

Frage 2: (6 Punkte):

Nenne die drei anderen Möglichkeiten und veranschauliche mit Skizzen, wie der Temperaturverlauf an solchen Tagen sein könnte.

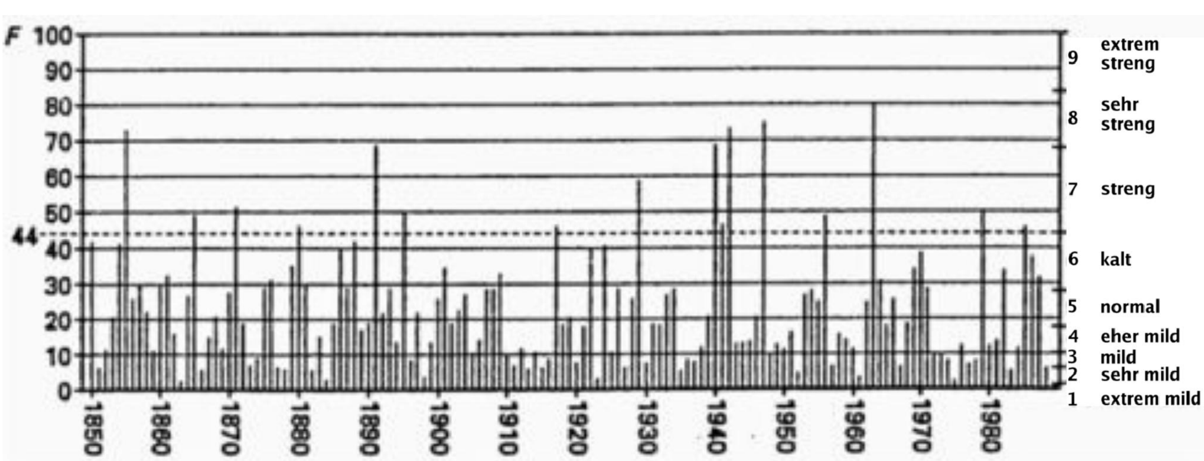
Nach Ablauf eines Winters ist die Anzahl von Frosttagen f, Eistagen e und sehr kalten Tagen s bekannt. Die „Frostzahl“ F wird dann berechnet mit der Formel:

$$F = 0,00275f^2 + 0,667e + 1,111s$$

Es ist möglich, dass ein Tag einen Beitrag von mehr als 1 zur Berechnung von F liefert, aber keinen Beitrag zur Hellmann-Zahl liefert.

Frage 3: (3 Punkte):

Was ist an einem solchen Tag los? Erläutere!



(Abbildung 3)

Abbildung 3 zeigt, welche Frostzahl man für die Winter im Zeitraum von 1850 bis 1988 ermittelt hat. Der Winter 1850 bedeutet den Winter 1849-1850 usw.

Frage 4: (3 Punkte):

Berechne mit Hilfe der Abbildung 3 die relative Häufigkeit von Wintern im Zeitraum von 1850 bis 1988, für die $F > 44$ gilt.

Frage 5: (4 Punkte):

Mittels der Frostzahl teilt man die Winter in 9 Klassen ein, von „extrem mild“ bis „extrem streng“. So definiert man zum Beispiel einen Winter als „streng“ für $44 < F \leq 68$. In einem bestimmten Winter der Klasse „streng“ zählte man 70 Frosttage und 37 Eistage. Berechne die kleinste und größte Anzahl von sehr kalten Tagen, die dieser Winter gehabt haben kann.

Frage 6: (4 Punkte):

Ein bestimmter Winter falle in die Klasse „streng“. Berechne, wie viele Frosttage dieser Winter mindestens gehabt haben muss.

Hinweise zur Aufgabe „Winter“

Themenbereiche: Zeichnen von Graphen nach im Text dargestellten Bedingungen, quadratische Terme und Funktionen,
außerdem: Der besondere Anspruch dieser Aufgabe ergibt sich aus dem Lesen von komplexen Sachtexten sowie Lesen und Auswerten von Graphiken,

	Lernvoraussetzungen	**Bemerkungen**
Frage 1	Ablesen in der Grafik, Übertragung der im Text formulierten Angaben in die dazugehörige Verlaufslinie eines Winters	Grafik für deutsche Schüler anspruchsvoll, weil diese Art der Darstellung unbekannt und komplex ist, ebenso ist das Herausfinden, welche Linie zu welchen Bedingungen im Text gehört, nicht der übliche Stoff des Mathematikunterrichts in NRW.
Frage 2	Exakter Umgang mit sprachlichen Formulierungen, um klare Beziehungen zwischen den Wintertagen mit verschiedenen Eigenschaften herzustellen	Hier werden über die sprachlichen Formulierungen hinaus ihre Übertragung in einen möglichen Kurvenverlauf erwartet, dieser sollte auch bezüglich der Tageszeit stimmig sein.
Frage 3	Umgang mit quadratischen und linearen Termen, Abschätzen der Änderung der Ergebnis-Werte durch Änderung der Eingabewerte im quadratischen, linearen und absoluten Glied	Das Einsetzen von Zahlen und Abschätzen des Terms ist für deutsche Schüler sicher nicht die gewohnte Vorgehensweise zur Lösung einer Teilaufgabe.
Frage 4	Auswerten der Abbildung 3 durch Abzählen, daraus ist die relative Häufigkeit zu berechnen	ungewohnt: Das Ablesen in Grafiken als Lösungsmethode zu akzeptieren
Frage 5	Einsetzen in den quadratischen Term, anschließend Lösen einer linearen Gleichung, sinnvolles Runden des Ergebnisses	keine
Frage 6	Lösen von quadratischen Ungleichungen, sinnvolle Interpretation der Nullstellen der quadratischen Funktion	Schwierigkeit, den quadratischen Term durch inhaltliche Überlegungen auf eine Variable zu reduzieren. Es eignen sich auch Venn-Diagramme, um auf den Ansatz zur Lösung zu kommen.

Kommentar:

Diese Aufgabe aus dem Jahr 1994 zeigt sehr deutlich die veränderte Schwerpunktsetzung im niederländischen Mathematikunterricht für die späteren „Nicht-Mathematiker“ unter den Schülerinnen und Schülern. Es wird ein sehr komplexer Sachverhalt, die Klassifizierung von Winterwetter, in mehreren kleinen Schritten dargestellt, die einzelnen Eigenschaften von Wintertagen und die Verläufe von verschiedenen Wintern sind durch Textarbeit und Auswertung von Diagrammen zu interpretieren. Genaues Lesen ist sehr wichtig, ebenso muss man über einige Formulierungen intensiv nachdenken, um zu trennscharfen und exakten Deutungen der in dieser Aufgabe eingeführten Begriffe zu gelangen. Der innermathematische Stoff passt nicht zum Kanon der gymnasialen Oberstufe in Deutschland. Dennoch oder vielleicht gerade deshalb ist diese Aufgabe ein besonders gutes Beispiel dafür, dass im Mathematikunterricht das Denken stärker an neuen, realitätsnahen und authentischen Kontexten geschult werden sollte.

Lösung der Aufgabe „Winter“:

Frage 1:

Wenn in einem Monat von strenger Kälte die Rede ist, dann ist dies in Abbildung 1 als ein Zeitraum erkennbar, in dem der Graph sehr steil ansteigt (ein großer Beitrag zur Hellmann-Zahl pro Tag). Im Winter 1890-1891 fiel die strenge Kälte vor allem in den Dezember; man findet nur einen Graphen, der im Dezember besonders steil verläuft und danach kaum noch ansteigt. Also muss dieser Graph mit der Hellmann-Zahl 273 zum Winter 1890-1891 gehören.

Die drei kältesten Winter haben die Hellmann-Zahlen 346, 343 und 332. Den spätesten Wintereinbruch kann man bei dem Winter mit der Hellmann-Zahl 332 feststellen, nämlich erst im Laufe des Januars (bei den beiden anderen friert es im Dezember schon kräftig). Also muss der Winter 1941-1942 die Hellmann-Zahl 332 haben.

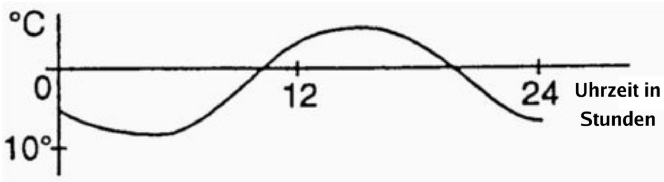
Für den Winter 1955-1956 muss der Graph im Februar (also zwischen 1. Feb. und 1. März) stark steigen, wohingegen die anderen Monate kaum einen Beitrag zur Hellmann-Zahl liefern (also dort ein beinahe waagerechter Graphenverlauf). Der Winter 1955-1956 hat also die Hellmann-Zahl 211.

Frage 2:

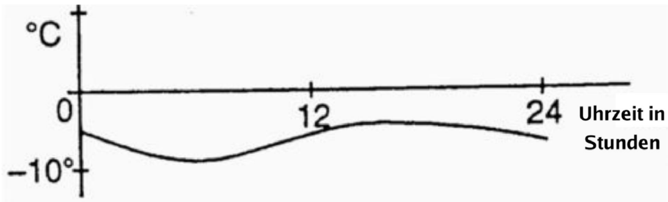
Aus dem Text wird deutlich, dass es um Frosttage geht, die nicht auch noch als Eistag und/oder sehr kalter Tag gezählt werden dürfen. Die vier möglichen Kombinationen sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

	kein Eistag	ein Eistag
kein sehr kalter Tag	A	B
ein sehr kalter Tag	C	D

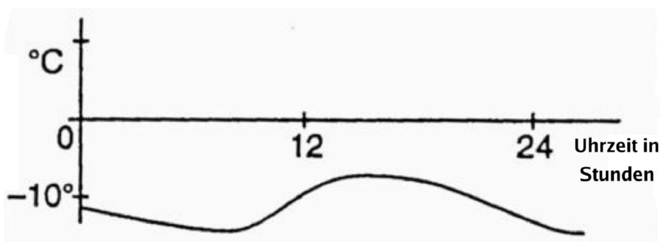
Ein Beispiel der Möglichkeit C ist in Abbildung 2 dargestellt. Im Falle A muss die Temperatur wohl unter $0°C$ liegen (Frosttag), aber nicht den ganzen Tag (kein Eistag). Die Temperatur muss darüberhinaus oberhalb von $-10°C$ bleiben (kein sehr kalter Tag). Ein passendes Beispiel ist :



Bei der Möglichkeit B muss die Temperatur den ganzen Tag unter $0°C$ sein (Eistag), aber oberhalb von $-10°C$ (kein sehr kalter Tag) bleiben; beispielsweise:

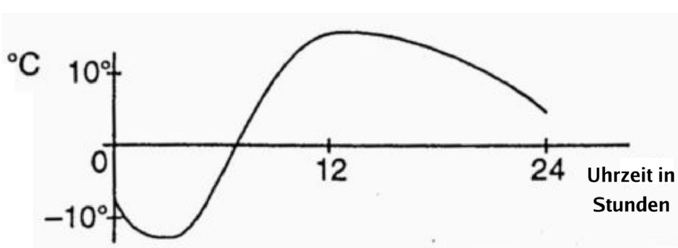


Für D muss die Temperatur den ganzen Tag unter $0°C$ liegen (Eistag) und muss das Minimum $\leq -10°C$ sein (sehr kalter Tag); ein Beispielgraph zu dieser Situation:



Frage 3:

Ein Eistag kann es nicht sein, denn er würde einen Beitrag zur Hellman-Zahl liefern, wenn die Temperatur den ganzen Tag unter $0°C$ bleibt und damit auch die mittlere Tagestemperatur an diesem Tag kleiner als $0°C$ ist. Wenn die Anzahl der Frosttage f um 1 ansteigt, kann dann die Änderung des Ergebnisses von $0,00275f^2$ mehr als 1 ausmachen? Das ist nicht möglich, weil die Anzahl von Frosttagen im Jahr kleiner als 150 ist. Vergleicht man nun z.B. $f = 150$ mit $f = 151$, so erhält man eine Zunahme von $0,00275 \cdot 151^2 - 0,00275 \cdot 150^2 \approx 0,83$. Ein Tag kann also nur einen Beitrag von mehr als 1 zur Berechnung von F liefern, wenn es ein sehr kalter Tag ist (der Faktor 1,111 sorgt für einen Beitrag zur Berechnung von F, der größer als 1 ist). Wenn nun an solch einem sehr kalten Tag die mittlere Tagestemperatur $0°C$ ist, dann liefert dieser Tag keinen Beitrag zur Hellmann-Zahl. Ein beispielhafter Verlauf der Tagestemperatur könnte sein:



Frage 4:

Die Gesamtanzahl der Winter zwischen 1850 und 1988 ist 139 (sowohl 1850, als auch 1988 zählen mit!). Von diesen 139 Wintern genügen 16 der Bedingung $F > 44$ (es ist zu zählen, wie viele Stäbchen über die gestrichelte Linie auf der Höhe 44 hinausragen). Die relative

Häufigkeit ist also $\frac{16}{139} \approx 0,1151$.

Frage 5:

Der zu $F = 68$ und den Werten $f = 70$ und $e = 37$ gehörende s-Wert erfüllt die Gleichung:

$68 = 0,00275 \cdot 70^2 + 0,667 \cdot 37 + 1,111 \cdot s \quad \Longleftrightarrow \quad 29,846 = 1,111s$ also $s \approx 26,86$.

Entsprechend gehört zu $F = 44$ und den Werten $f = 70$ und $e = 37$ die Gleichung:

$44 = 0,00275 \cdot 70^2 + 0,667 \cdot 37 + 1,111 \cdot s \quad \Longleftrightarrow \quad s \approx 5,26$.

Aus der Bedingung $44 < F \leq 68$ ergibt sich also $5,26 < s < 26,86$. Die Variable s kann aber nur ganzzahlige Werte annehmen, also ist die kleinste Anzahl sehr kalter Tage 6 und die größte Anzahl sehr kalter Tage in diesem Winter 26.

Frage 6:

Jeder Eistag und jeder sehr kalte Tag sind auch ein Frosttag, also muss, um mit so wenig Frosttagen wie möglich in die Klasse „streng“ zu fallen, jeder Frosttag zugleich auch ein Eistag und ein sehr kalter Tag sein. Es gilt also $f = e = s$, folglich ist $F = 0,00275 \cdot f^2 + 1,788 \cdot f$.

Wir müssen also das kleinste f finden, für das gilt: $F > 44$:

$0,00275 \cdot f^2 + 1,788 \cdot f > 44 \quad \Longleftrightarrow \quad 0,00275 \cdot f^2 + 1,788 \cdot f - 44 > 0 \qquad (*)$

Die Nullstellen der linken Seite in der letzten Ungleichung können mit der abc-Formel bestimmt werden. Es gilt

$$f = \frac{-1,778 \pm \sqrt{3,645284}}{0,0055} = \frac{-1,778 \pm 1,9093}{0,0055} = 23,9 \qquad (\text{oder} \quad -670,4).$$

Da es sich beim linken Teil von (*) um eine Talparabel handelt und f positiv ist, muss also $f > 23,9$ sein. Ein Winter der Klasse „streng“ muss folglich mindestens 24 Frosttage haben.

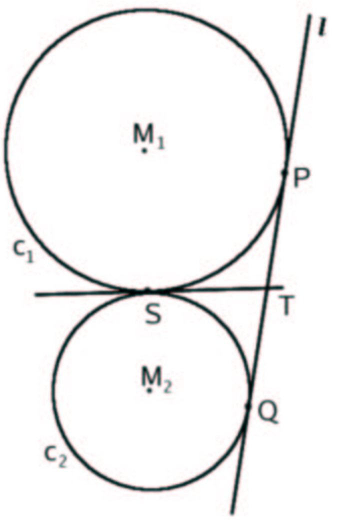
Kapitel 2

Wikunde B: Examensaufgaben

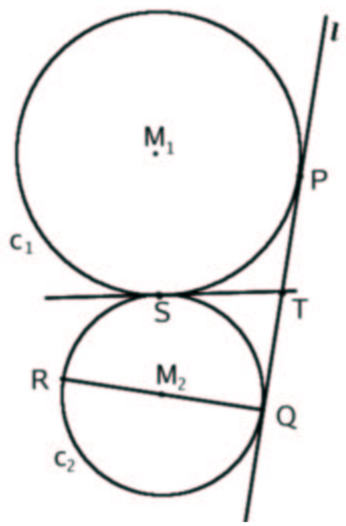
2.1 Beispiele zur euklidischen Geometrie

Auf einer Geraden (Examen VWO 2002, Aufgabe 7)

In Abbildung 1 sind zwei sich berührende Kreise c_1 und c_2 eingezeichnet mit den Mittelpunkten M_1 und M_2. Der Berührpunkt der beiden Kreise ist S. Die Gerade l berührt den Kreis c_1 in P und den Kreis c_2 in Q. Die gemeinsame Tangente an c_1 und c_2 in S schneidet die Gerade l im Punkt T.



(Abbildung 1)



(Abbildung 2)

Frage 1: (5 Punkte)

Beweise, dass die Punkte P, Q und S auf einem Kreis um T liegen.

Außerdem ist der Durchmesser $\overline{QR}$ durch c_2 gegeben. Siehe hierzu die Abbildung 2. Diese Abbildung findest du ebenfalls in der Anlage zu den Fragen 1 und 2.

Frage 2: (6 Punkte)

Beweise, dass die Punkte P, S und R auf einer Geraden liegen.

Hinweise zur Aufgabe „Auf einer Geraden “

Themenbereiche: Euklidische Geometrie

	Lernvoraussetzungen	**Bemerkungen**
Frage 1/2	Einfache Grundlagen der Euklidischen Geometrie: Satz von Thales, Winkelsätze, Kongruenzsätze	Besonderheit ist, dass für die Aufgabe Kenntnisse der Euklidischen Geometrie ausreichen, die im Lehrplan NRW für die Klassen 7 und 8 vorgesehen sind.

Kommentar:

Der neue Lehrplan ab 1999 fordert im Profil „Natur und Technik“ von Wiskunde B die Behandlung der euklidischen Geometrie. Dadurch sollen logisches Denken und korrektes Begründen gefördert werden. Diese Anforderungen sollten nicht unterschätzt werden! Der Anspruch der Aufgabe liegt auch nicht in der Kenntnis umfangreicher theoretischer Grundlagen, sondern im Auffinden eines mehrschrittigen Beweisweges und in der korrekten Begründung der einzelnen Schritte.

Lösung der Aufgabe „Auf einer Geraden“:

Frage 1
max. 5 Punkte

- $\sphericalangle PST = \sphericalangle SPT$ (Winkel zwischen Sehne und Tangente) 2
- Daher ist $\overline{PT} = \overline{ST}$ (gleichschenkliges Dreieck) 1
- Analog gilt $\overline{ST} = \overline{QT}$ 1
- Daher liegen P, Q und S auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt T. 1

oder

- $\sphericalangle M_1PT = \sphericalangle M_1ST = 90°$; $\overline{M_1P} = \overline{M_1S}$ $\overline{M_1T} = \overline{M_1T}$ 1
- Daher ist das Dreieck M_1PT kongruent mit Dreieck M_1ST (Kongruenzsatz SSW_g) 1
- Daher ist $\overline{PT} = \overline{ST}$ 1
- Analog gilt $\overline{ST} = \overline{QT}$ 1
- Also liegen P, Q und S auf dem Kreis mit Mittelpunkt T. 1

Frage 2
max. 6 Punkte

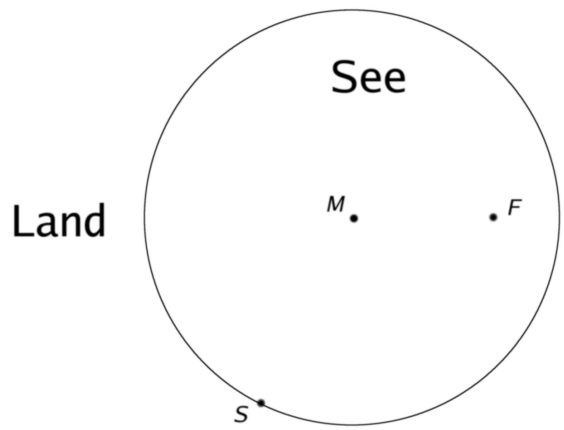
- $\sphericalangle PSQ = 90°$ (Satz von Thales) 2
- $\sphericalangle QSR = 90°$(Satz von Thales) 2
- $\sphericalangle PSQ + \sphericalangle QSR = 180°$ 1
- Daher liegen P, S und R auf einer Geraden 1

oder

- M_1S und M_2S stehen beide senkrecht auf der gemeinsamen Tangente in S, daher liegt S auf der Strecke M_1M_2 1
- M_1P und RQ stehen senkrecht zu l, daher ist $M_1P||RQ$. 1
- $\sphericalangle PM_1M_2 = \sphericalangle RM_1M_2$ (Wechselwinkel) 1
- $\sphericalangle PSM_1 = 0,5 \cdot (180° - \sphericalangle PM_1M_2)$ und
  $\sphericalangle PSM_2 = 0,5 \cdot (180° - \sphericalangle PM_2M_1)$ 1
- Daher ist $\sphericalangle PSM_1 = \sphericalangle RSM_2$ 1
- Daher liegen P, S und R auf einer Geraden, denn P und R liegen nicht auf derselben Seite von M_1M_2. 1

Bootstour (Examen VWO 2001, Aufgabe 1)

In einem kreisförmigen See liegen zwei Inseln M und F. Wir betrachten die Inseln als Punkte. M liegt genau in der Mitte des Sees (siehe Abbildung).



S ist ein Punkt am Ufer des Sees. Ein kleines Boot fährt von S auf geradem Weg nach M.

Frage 1: (5 Punkte)

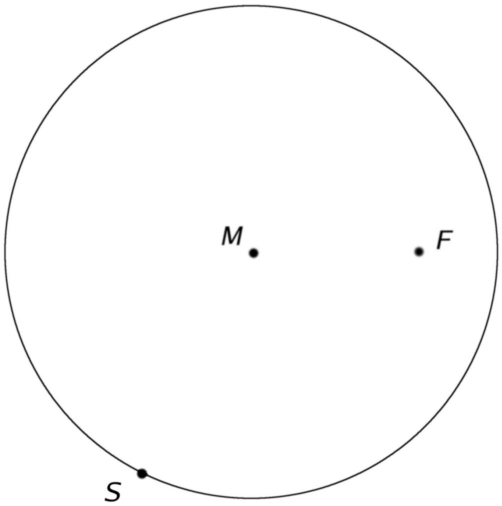
Zeichne den Punkt P auf der Fahrtstrecke des Bootes ein, der gleich weit von S und von F entfernt ist (in die Anlage zu Frage 1). Erläutere dein Vorgehen.

Ein zweites Boot startet in einem Punkt am Ufer des Sees und fährt ebenfalls in gerader Linie nach M. Auf halbem Wege ist der Abstand des Bootes zum Land genauso groß wie der Abstand des Bootes zu den beiden Inseln.

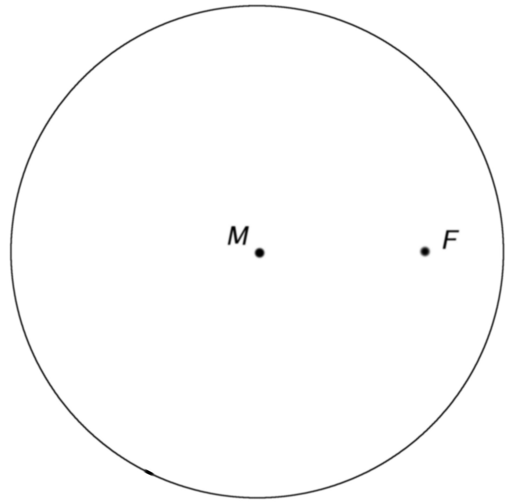
Frage 2: (6 Punkte)

Zeichne die Punkte am Seeufer ein, von denen aus das Boot gestartet sein kann (in die Anlage zu Frage 2). Erläutere dein Vorgehen.

Anlage zu Frage 1:



Anlage zu Frage 2:



Hinweise zur Aufgabe „Bootstour“

Themenbereiche: Euklidsche Geometrie

	Lernvoraussetzungen	**Bemerkungen**
Frage 1/2	Es sind nur einfache Grundkenntnisse der Geometrie erforderlich: Ortslinieneigenschaften des Kreises und der Mittelsenkrechten einer Strecke.	Eine weitere Lösung ergibt sich mit der Ortslinieneigenschaft der Ellipse, wobei sich aber Konstruktionsprobleme ergeben.

Kommentar:

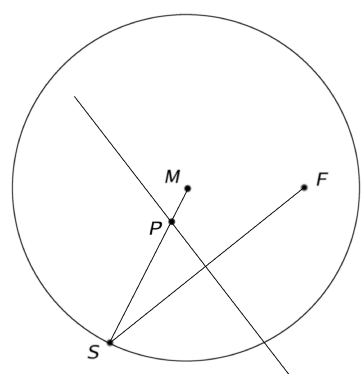
Die vorstehende Aufgabe aus der Abiturklausur 2001 verdeutlicht die Zielsetzung, die mit der Behandlung der euklidischen Geometrie verfolgt wird: Ideen haben, Begründungen finden und die Begründungen schriftlich darstellen können. Dabei kommt es nicht auf tiefliegende, komplizierte Sachverhalte an. Die vorstehende Aufgabe hat verschiedene Lösungswege, was aber in der Abiturklausur nicht ausgenutzt wird. Hieraus ergeben sich aber Möglichkeiten für den Unterricht.

Lösung der Aufgabe „Bootstour“:

Frage 1
max. 5 Punkte

- Der gesuchte Punkt P liegt auf der Strecke MS. P liegt gleich weit von S und F entfernt. Daher liegt P auf der Mittelsenkrechten zur Strecke SF. P ist der Schnittpunkt der Strecke SM mit der Mittelsenkrechten zu SF. 3

- Korrekte Zeichnung



2

Frage 2

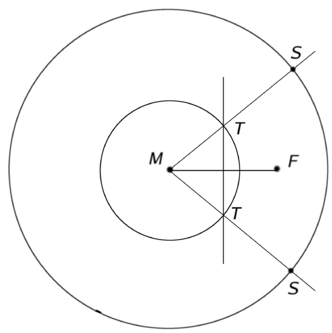
max. 6 Punkte

- Es sei T ein Punkt, der einerseits gleichweit von den beiden Inseln M und F entfernt ist und der sich andererseits auf halbem Weg vom Ufer zur Insel M befindet. T ist gleich weit von M und F entfernt, also liegt T auf der Mittelsenkrechten zur Strecke MF. 1

- T liegt auf halbem Weg von M zum Kreisrand. Also liegt T auf dem Kreis k um M mit der Hälfte des Seeradius als Radius. 1

- T ergibt sich also als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zur Strecke MF mit dem Kreis k. Der gesuchte Punkt S ergibt sich durch Verlängerung der Strecke MT. Es gibt zwei Punkte S, die die Bedingungen erfüllen. 2

- korrekte Zeichnung



2

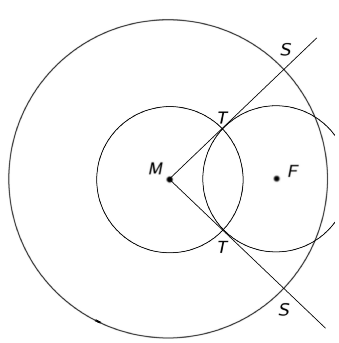
oder

- Es sei T ein Punkt, der einerseits gleichweit von den beiden Inseln M und F entfernt ist und der sich andererseits auf halbem Weg vom Ufer zur Insel M befindet. T liegt dann auf dem Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M und der Hälfte des Seeradius als Radius. 1

- Da die Strecken MT und FT gleichlang sind, liegt T auch auf dem Kreis k_2 um F mit der Hälfte des Seeradius als Radius. 1

- T ergibt sich als Schnittpunkt der beiden Kreise k_1 und k_2. Der gesuchte Punkt S ergibt sich durch Verlängerung der Strecke MT. Es gibt zwei Punkte S, die die Bedingungen erfüllen. 2

- korrekte Zeichnung



2

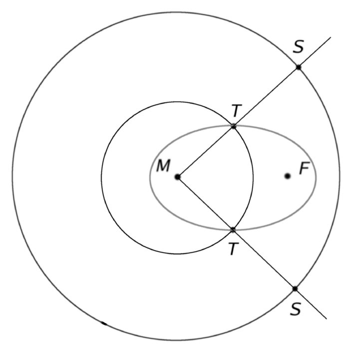
oder

- Es sei T ein Punkt, der einerseits gleichweit von den beiden Inseln M und F entfernt ist und der sich andererseits auf halbem Weg vom Ufer zur Insel M befindet. T liegt auf halbem Weg von M zum Kreisrand. Also liegt T auf dem Kreis k um M mit der Hälfte des Seeradius als Radius.

- Alle Punkte, die gleichweit von M und F entfernt sind, liegen auf einer Ellipse e.

- T ergibt sich als Schnittpunkt des Kreises k und der Ellipse e. Der gesuchte Punkt S ergibt sich durch Verlängerung der Strecke $\overline{MT}$. Es gibt zwei Punkte S, die die Bedingungen erfüllen.

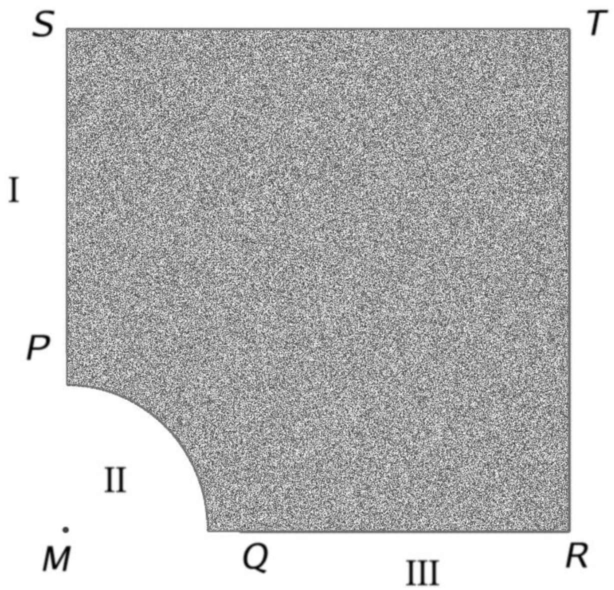
- Problem dieser Lösung: eine korrekte Ellipsenkonstruktion ist für die Schüler nicht durchführbar.



2.2 Weitere Aufgaben

Einteilung (Examen VWO 2002, Aufgabe 2)

Das graue Gebiet in Abbildung 2 ist ein Teil des Quadrats MRTS mit der Seitenlänge 7 LE. Der Rand PQ ist ein Viertelkreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius 2. Diese Abbildung findet sich auch auf der Anlage. Es gibt die drei Länder I, II und III, die alle drei an das grau gefärbte Gebiet angrenzen. Die Grenzen mit den Ländern sind also SP, PQ und QR. Das graue Gebiet in der Abbildung wird auf die drei Länder aufgeteilt nach dem „Nächste-Nachbarn-Prinzip“.



Im grauen Gebiet liegt auf der Strecke MT ein Punkt D, der gleichweit von allen drei Gebieten entfernt ist.

Frage 1: (3 Punkte)

Berechne den Abstand von D zu den drei Ländern auf zwei Stellen nach dem Komma genau.

Frage 2: (7 Punkte)

Zeichne in die Abbildung auf der Anlage die Grenzlinien zwischen den drei Ländern in das graue Gebiet ein. Erläutere dein Vorgehen.

Hinweise zur Aufgabe „Einteilung“

Themenbereiche: Kegelschnitte

	Lernvoraussetzungen	**Bemerkungen**
Frage 1	Satz von Pythagoras, Eigenschaften der Winkelhalbierenden, Lösen einer quadratischen Gleichung	Die Aufgabenstellung mag ungewohnt sein, aber es wird nur SI-Stoff vorausgesetzt.
Frage 2	Eigenschaften der Parabel: Menge aller Punkte, die von einem Punkt (Brennpunkt) und einer Geraden (Leitgeraden) den gleichen Abstand haben.	Die Behandlung der Kegelschnitte ist im Lehrplan NRW nicht mehr vorgesehen.

Kommentar:

Die Aufgabe ist charakteristisch für einen augenblicklichen Trend im niederländischen Mathematikunterricht: Probleme werden häufig in eingekleideter Form (hier: Grenzen, Länder) gegeben. Die unterrichtlichen Voraussetzungen sind nach dem neuen Lehrplan ab 1999 in Wiskunde B1,2 (vergleiche S.??) gegeben. Dieser verlangt in einer Reihe von Zielen die Behandlung der Kegelschnitte.

Auch wird die Einteilung von Gebieten in einzelne Teile im Unterricht in vielfältigen Varianten behandelt (z.B. mit Woronoi-Diagrammen).

Lösung der Aufgabe „Einteilung“:

Frage 1
max. 3 Punkte

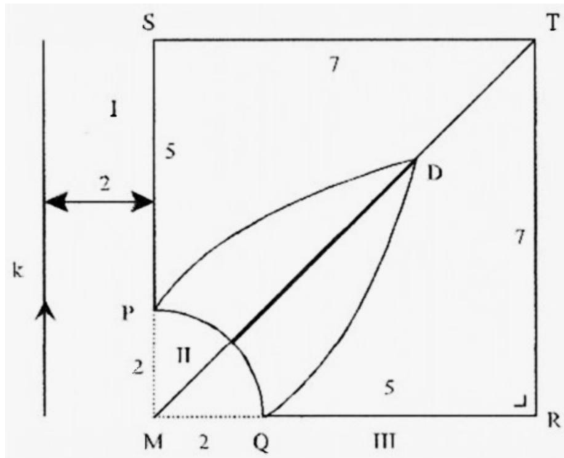
- x sei die Entfernung von D zu den drei Gebieten. E sei der Fußpunkt des Lotes von D auf QR. Das Dreieck MED ist rechtwinklig. Nach Pythagoras gilt dann $x^2 + x^2 = (x + 2)^2$ 1
- Hieraus folgt $x \approx 4,83$. 2

Frage 2
max. 7 Punkte

- Ein erstes Stück der Grenze verläuft auf einem Teil der Parabel mit dem Brennpunkt M und mit der Leitlinie k, die 2 LE links von PS liegt. 2
- Die Parabel geht durch den Punkt P. 1
- Das zweite Stück der Grenze ist ein Teil der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle STR$. 1

- Das dritte Stück der Grenze ist das Spiegelbild des ersten Stückes (oder ein Teil der Parabel mit dem Brennpunkt M und mit der Leitlinie n, die 2 LE links von QR liegt). 1

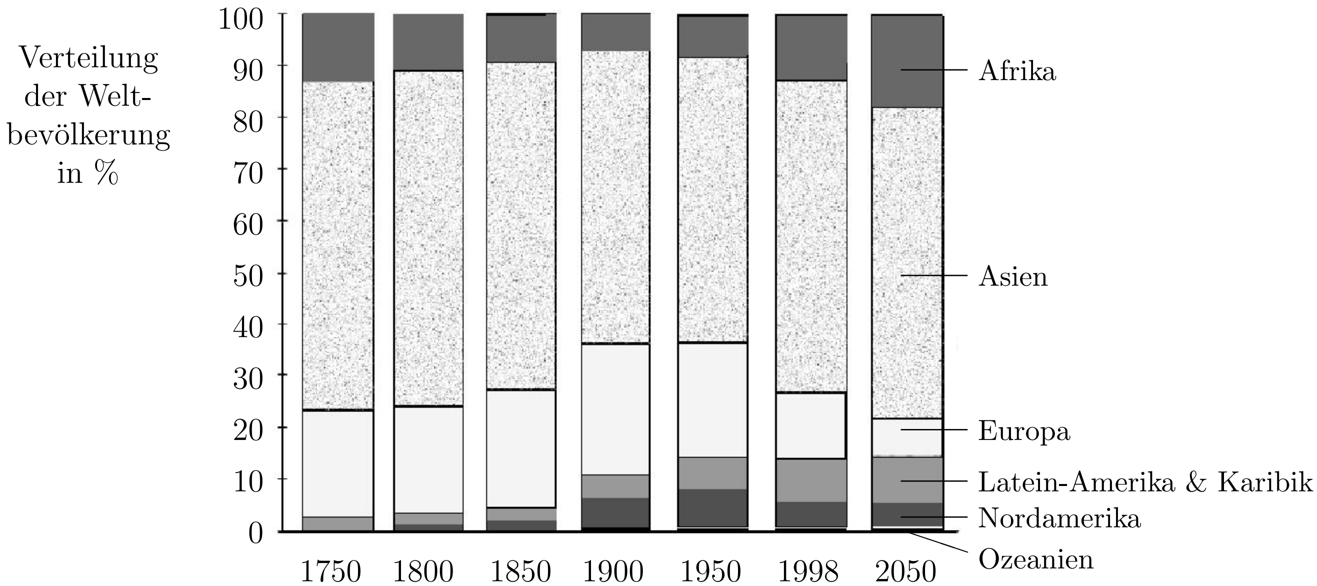
- Anfertigung der Zeichnung



2

Weltbevölkerung (Wiskunde B1 Examen VWO 2001, 2. Termin)[1]

Am 12. Oktober 1999 wurde der sechsmilliardste Weltbürger geboren. Aus diesem Anlass heraus veröffentlichten die Vereinten Nationen den Jahresbericht Six billion - a time for choices. Darin wiesen die Vereinten Nationen Sarajevo als den Ort aus, an dem der sechsmilliardste Weltbürger geboren wurde. Dies ist natürlich ein symbolischer Akt: wo genau der sechsmilliardste Weltbürger geboren wurde, ist überhaupt nicht bekannt. Es hätte, ausgehend von der Bevölkerungszahl Asiens, näher gelegen, den sechsmilliardsten Weltbürger in Asien zur Welt kommen zu lassen.



(Abbildung 1)

Auf der Grundlage der obigen Abbildung nehmen wir an, dass der Anteil Asiens an der Weltbevölkerung zwischen 1998 und 2050 ungefähr gleich bleibt. Den siebenmilliardsten Weltbürger erwarten die Vereinten Nationen im Jahre 2013 und den achtmilliardsten Weltbürger im Jahre 2028. Nimm an, dass die Vereinten Nationen durch Los einen Kontinent ausweisen, in dem symbolisch der siebenmilliardste Weltbürger geboren wird, und dass dabei für jeden Kontinenten die Wahrscheinlichkeit für die Auswahl gleich dem Anteil des Kontinenten an der Weltbevölkerung ist. Das gleiche Verfahren soll für den achtmilliardsten Weltbürger gelten.

Frage 1: (5 Punkte)

Berechne unter Verwendung der Abbildung, wie groß in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Vereinten Nationen für mindestens eine dieser zwei Geburten Asien auswählt.

Abbildung 2 stammt aus dem Bericht der Vereinten Nationen.

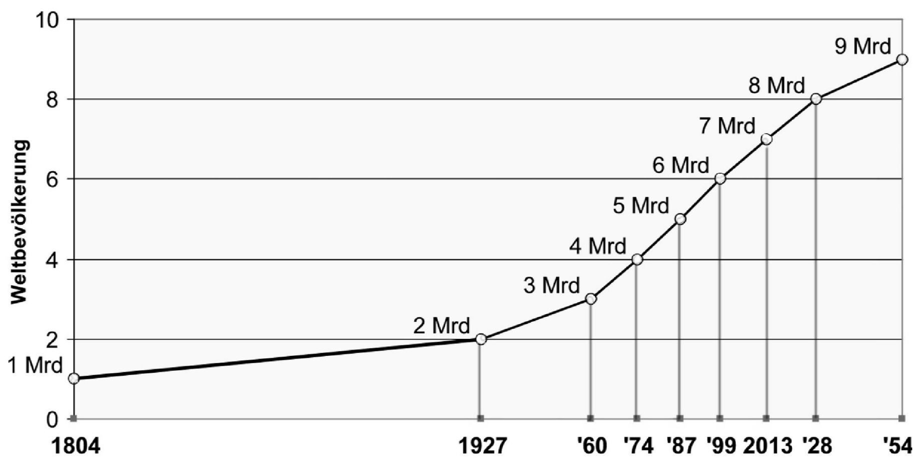
Die hier dargestellte Größe der Weltbevölkerung vollzieht sich annähernd nach dem folgenden Wachstumsmodell:

[1] N. C. Keemink, P. Thiel: VWO Wiskunde B, Examenbundel 2002/2003.Utrecht/Zutphen 2003, S. 193

$$W(t) = \frac{L}{1 + (L-1) \cdot g^t}$$

Dabei bedeutet

- W die Weltbevölkerung in Milliarden
- t die Anzahl der Jahre nach 1804
- g eine Konstante mit $0 < g < 1$
- L den Näherungswert der Weltbevölkerung in Milliarden, das ist der Grenzwert, gegen den W auf die Dauer wachsen wird.



(Abbildung 2)

Die Wachstumsgeschwindigkeit $\frac{dW}{dt}$ der Weltbevölkerung ist am größten, wenn

$$t = \log_g\left(\frac{1}{L-1}\right)$$

ist.

Frage 2: (5 Punkte)

Zeige, dass für diesen Wert von t gilt: $\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{4} \cdot \ln(g)$.

Die Konstante g ist gleich 0,983. Die Weltbevölkerung ist also t Jahre nach 1804 gegeben durch

$$W(t) = \frac{L}{1 + (L-1) \cdot 0,983^t}$$

Der Näherungswert L ist nicht genau bekannt. Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit, dass die vorhergesagte Weltbevölkerung im Jahre 2054, 250 Jahre nach 1804, größer als 10,5 Milliarden ist, mit anderen Worten für die Wahrscheinlichkeit, dass $W(250) > 10,5$ ist. „$W(250) > 10,5$“ ist äquivalent zu „$L > 12,1$“.

Frage 3: (5 Punkte)

Zeige diese Äquivalenz.

Es wurden viele Prognosen aufgestellt. Dabei erweisen sich die Werte von L als normal verteilt mit dem Erwartungswert 10 und der Standardabweichung 1,5.

Frage 4: (4 Punkte)

Berechne unter Beachtung der genannten Annahmen, in wie viel Prozent der Prognosen die vorausgesagte Weltbevölkerung in 2054 größer als 10,5 Milliarden ist.

Hinweise zur Aufgabe „Weltbevölkerung“

	Lernvoraussetzungen	**Bemerkungen**
Frage 1	Umgang mit Tabellen, Grundregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung	einfache Einstiegsaufgabe
Frage 2	Differenzieren einer Funktion mit Parameter, Quotientenregel, Termumformungen mit Logarithmen	Anspruchsvoller Teil aufgrund der Parameter, mehrere aufeinanderfolgende Rechenschritte verlangen Übersicht
Frage 3	Ungleichung	
Frage 4	Standardnormalverteilung	Wechsel von der Analysis zur Stochastik

Kommentar:

Der Kontext der Aufgabe ist sinnvoll und relevant. Fragen der Prognosen über Bevölkerungswachstum gehören zu den wichtigen Anwendungsgebieten der Mathematik. Die Aufgabe verlangt den Umgang mit Tabellen und Grafen und fragt damit Lesekompetenz in weiterem Sinne ab. Der Schüler erhält Informationen über längere Textanteile. Typisch ist auch der Wechsel zwischen verschiedenen Gebieten der Oberstufenmathematik (hier: Stochastik $\longrightarrow$ Analysis $\longrightarrow$ Stochastik). Anspruchsvoll ist vor allem die Frage 2, in der zwischen Konstanten/Parametern und Variablen unterschieden werden muss. Von der Aufgabenstellung her eignen sich Frage 3 und 4 zur Verwendung eines grafischen Taschenrechners.

Lösung der Aufgabe „Weltbevölkerung“:

Frage 1:

- Die Wahrscheinlichkeit, ausgewählt zu werden, ist gleich dem Bevölkerungsanteil des Kontinenten an der Weltbevölkerung. Man bestimmt zunächst unter Verwendung der Abbildung 1 den Anteil Asiens an der Gesamtbevölkerung. Der Anteil Asiens an der Gesamtbevölkerung beträgt ungefähr 60% (durch Messungen der Abbildung entnommen).

- $P(\text{Asien wird ausgewählt}) = 0,6$
  $P(\text{ein anderer Kontinent wird ausgewählt}) = 0,4$
  $P(\text{mindestens ein Mal bei zwei Wahlgängen wird Asien gewählt})$

1. Möglichkeit
$= P(\text{Asien wird ein Mal ausgewählt}) + P(\text{Asien wird zwei Mal ausgewählt})$
$= 0,4 \cdot 0,6 \cdot 2 + 0,6^2 = 0,84$

2. Möglichkeit (Komplementärregel)
$= 1 - P(\text{Asien wird nicht gewählt}) = 1 - 0,4^2 = 0,84$

3. Möglichkeit (Binomialverteilung)
Zufallsgröße X gibt die Anzahl an, wie oft Asien ausgewählt wird. X ist binomialverteilt mit $n = 2$ und $p = 0,6$. Unter Verwendung der Formelsammlung oder des Taschenrechners folgt: $P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - 0,16 = 0,84$

Frage 2: • Man bestimmt erst die 1. Ableitung W' mit Hilfe der Quotientenregel. Dabei ist zu bedenken, dass t die Variable ist und L und g Konstanten sind.

$$W'(t) = \frac{dW}{dt} = \frac{(1+(L-1)\cdot g^t)\cdot 0 - L\cdot(L-1)\cdot g^t\cdot\ln(g)}{(1+(L-1)\cdot g^t)^2}$$

$$= \frac{-L\cdot(L-1)\cdot g^t\cdot\ln(g)}{(1+(L-1)\cdot g^t)^2}$$

- $t = \log_g(\frac{1}{L-1})$ einsetzen in g^t ergibt: $g^t = g^{\log_g(\frac{1}{L-1})} = \frac{1}{L-1}$, denn $g^{\log_g(a)} = a$.
- Dies setzt man nun in W' ein und es ergibt sich:

$$W'(t) = \frac{-L\cdot(L-1)\cdot\frac{1}{L-1}\cdot\ln(g)}{(1+(L-1)\frac{1}{L-1})^2} = \frac{-L\cdot\ln(g)}{(1+1)^2} = -\frac{1}{4}L\cdot\ln(g)$$

- Schlussfolgerung: $\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{4}L\cdot\ln(g)$, wenn $t = log_g(\frac{1}{L-1})$.

Frage 3: • Die Weltbevölkerung im Jahre 2054 bedeutet für die Variable t, dass sie dann den Wert $t = 250$ annimmt. Berechne, für welches L die Weltbevölkerung für $t = 250$ größer als 10,5 Milliarden ist.

- Rechnung:

$$\frac{L}{1+(L-1)\cdot 0,983^{250}} = \frac{L}{1+(L-1)\cdot 0,01375} = \frac{L}{0,98625+0,01375L} > 10,5$$

$\Longleftrightarrow L > 10,5\cdot(0,98625+0,01375L)$
$\Longleftrightarrow L > 10,3566 + 0,1444\cdot L$
$\Longleftrightarrow 0,8556L > 10,3556$
also $\quad L > 12,1.$

- Bei zugelassenem graphischen Rechner gäbe es einen zweiten Lösungsweg über die Graphen der beiden Funktionen

$$y_1 = \frac{x}{1 + (x-1) \cdot 0,983^{250}} \qquad \text{und} \qquad y_2 = 10,5$$

  Aus dem Rechnerbild lässt sich dann ablesen, dass $L > 12,1$ sein muss.

Frage 4: L ist normalverteilt mit dem Erwartungswert 10 und der Standardabweichung 1,5. Gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit $P(W > 10,5)$ beziehungsweise $P(L > 12,1)$.

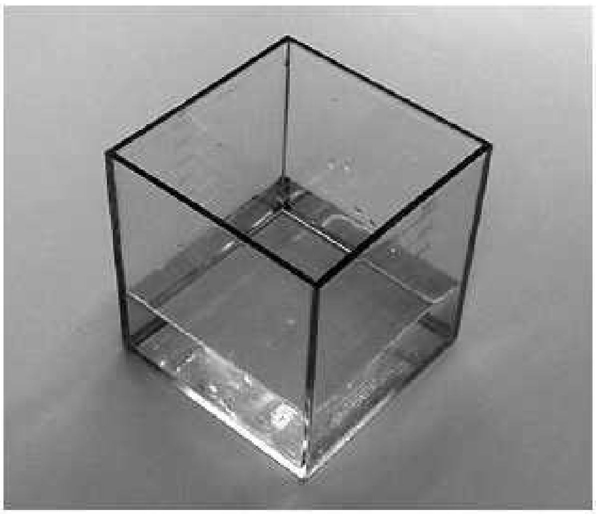
Man kann die Aufgabe mit dem grafischen Taschenrechner lösen oder mit Hilfe der Standardnormalverteilung / Formelsammlung.

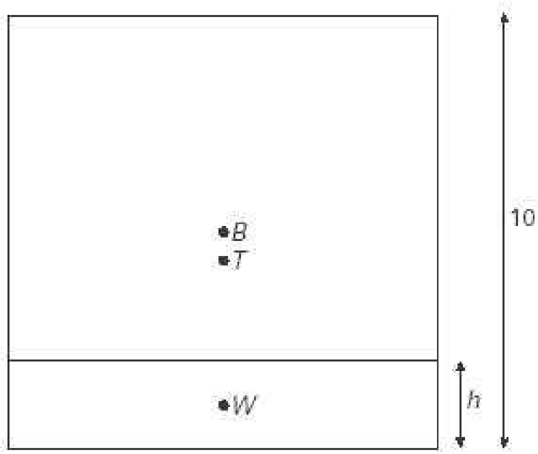
$P(L > 12,1) = 1 - P(z \leq \frac{12,1 - 10}{1,5}) \approx 1 - \Phi(1,4) = 1 - 0,9192 = 0,08$

Schlussfolgerung: In 8% der Prognosen wird die prophezeite Größe der Weltbevölkerung größer als 10,5 Milliarden sein.

Verschiebbarer Schwerpunkt (Examen VWO 2002, Aufgabe 3)

Ein würfelförmiges Gefäß mit Deckel hat die Innenmaße 10 cm mal 10 cm mal 10 cm und wiegt 1 kg. Der Schwerpunkt B des Gefäßes liegt im Mittelpunkt, also 5 cm über der Mitte des Bodens. Das Gefäß wird mit Wasser bis zu Höhe von h cm gefüllt. Der Schwerpunkt des Wassers W (ohne das Gefäß) liegt im Zentrum des Wassers, also $\frac{1}{2}h$ cm oberhalb der Mitte des Bodens. Siehe Foto und Figur, in der maßstabsgetreu eine Vorderansicht des Gefäßes gezeichnet ist.





Den Schwerpunkt des mit Wasser gefüllten Gefäßes nennen wir T. Der Punkt T liegt auf der Strecke $\overline{BW}$. Es gilt:

$$d_T = \frac{h}{h+10} \cdot d_W + \frac{10}{h+10} \cdot d_B$$

Hierbei sind d_T, d_W, d_B die Abstände in cm der Schwerpunkte T, W und B vom Boden.

Frage 1: (3 Punkte)

Berechne d_T für $h = 3$. Gib das Ergebnis auf eine Dezimalstelle genau an.

Frage 2: (4 Punkte)

Zeige, dass für den Abstand von T zum Boden gilt: $d_T = \dfrac{h^2 + 100}{2h + 20}$.

Wenn das Gefäß leer ist, fallen T und B zusammen. Während des Füllens des Behälters verschiebt sich Punkt T zuerst nach unten und später wieder nach oben. Wenn das Gefäß voll ist, fällt T wieder mit B zusammen.

Frage 3: (4 Punkte)

Berechne die Werte von h, für die gilt: $d_T < 4,5$. Gib das Ergebnis auf eine Dezimalstelle genau an.

Frage 4: (6 Punkte)

Berechne exakt für welche Werte von h der Abstand von T zum Boden minimal ist.

Hinweise zur Aufgabe „Verschiebbarer Schwerpunkt"

Themenbereiche: Analysis

	Lernvoraussetzungen	**Bemerkungen**
Frage 1	Bestimmung von Funktionswerten	einfach
Frage 2	Termumformungen	Bruchterme
Frage 3	Bruchgleichungen, die auf quadratische Gleichungen führen	auch mit GTR lösbar
Frage 4	Extremwertbestimmung, Quotientenregel, quadratische Gleichung	Keine Untersuchung auf Randextrema, es genügt die hinreichende Bedingung

Kommentar:

Eine Aufgabe, die einen physikalischen Sachverhalt sehr anschaulich darstellt. Das mathematische Modell (Formeln) wird vorgegeben. Erforderlich sind sicheres Umformen der Terme und Gleichungen. Die Aufgabe ist auch mit GTR oder CAS lösbar, dann sollten aber erklärende Texte eingefordert werden.

Lösung der Aufgabe „Verschiebbarer Schwerpunkt“:

Frage 1:

$d_W = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1\frac{1}{2}, \qquad d_T = \frac{3}{13} \cdot 1\frac{1}{2} + \frac{10}{13} \cdot 5 \approx 4{,}2\,(\mathrm{cm})$

Frage 2:

$d_T = \frac{h}{h+10} \cdot \frac{1}{2}h - \frac{10}{h+10} \cdot 5 \quad \text{also} \quad d_T = \frac{\frac{1}{2}h^2 + 50}{h+10} = \frac{h^2+100}{2h+20}.$

Frage 3:

$\frac{h^2+100}{2h+20} = 4{,}5$ ergibt (mit Hilfe GTR) $h \approx 1{,}3$ oder $h \approx 7{,}7$
also $d_T < 4{,}5$

für $1{,}3 < h < 7{,}7$.

Frage 4:

d_T ist minimal, wenn $\frac{d}{dh}\left(\frac{h^2+100}{2h+20}\right) = 0$ ist.

$\frac{d}{dh}d_T = \frac{2h(2h+20) - 2(h^2+100)}{(2h+20)^2}$

$\frac{d}{dh}d_T = 0$ ergibt $2h^2 + 40h - 200 = 0$

somit $h = -10 \pm \sqrt{200}$. Die zutreffende Antwort ist $h = -10 + \sqrt{200}$.

Kapitel 3

Wiskunde-Aufgaben in Abiturvorschlägen in NRW

Folgende Aufgabe aus dem Schulbuch „getal en ruimte“ zeigt eine Aufbereitung als Abituraufgabe für einen Grundkurs. Die Aufgabe Freizeitpark gibt ein Modell vor, womit die Besucherzahlen eines Freizeitparks und die Wartezeit vor der Wildwasserbahn berechnet werden können. In verschiedenen Aufgabenteilen müssen Extremwerte berechnet werden. Weiterhin wird deutlich, dass die grundlegenden Kenntnisse über den Zusammenhang von Funktion und Ableitungsfunktion gefordert werden. Die Verkettung der Funktionen wird in den letzten Teilen benutzt.

3.1 Freizeitpark - Abituraufgabe für den Grundkurs

In einem Freizeitpark ist an einem Tag in der Hochsaison die Wartezeit W in Minuten bei der Wildwasserbahn abhängig von der Zahl der Besucher B, die zu einem bestimmten Zeitpunkt t in Stunden im Park anwesend sind. Die Geschäftsleitung operiert mit folgendem Modell:

$$B = -50t^3 + 1\,800t^2 - 19\,200t + 62\,500 \qquad \text{und} \qquad W = e^{0{,}5\sqrt{B}-2}$$

Der Freizeitpark ist geöffnet von 10 Uhr morgens bis halb acht abends, also $10 \leq t \leq 19,5$.

a) Berechne die Anzahl der Besucher, die morgens an einem Tag der Hochsaison direkt nach Öffnung anwesend sind.

b) Zu welchem Zeitpunkt ist die Anzahl der Besucher maximal? Wie viele sind es?

c) Zu welchem Zeitpunkt ist der Andrang an den Kassen am größten? Schätze die Anzahl der Eintrittskarten, die dann pro Minute verkauft werden?

d) Sonja stellt sich um 16.30 Uhr an der Wildwasserbahn an. Wann kann sie einsteigen?

e) Eveline behauptet, dass sie wohl eine halbe Stunde an der Wildwasserbahn hat warten müssen. Zeige, dass Eveline übertrieben hat.

aus: getal en ruimte 5/6V-A3, epn-Verlag, 1994, Seite 160.

Die Aufgabe ist in einem Grundkurs gestellt worden, indem seit Beginn der Stufe 11 niederländische Aufgaben im Unterricht und in Klausuren bearbeitet wurden. Somit waren die Schüler mit erwarteten Anwendungssituationen und ihren mathematischen Modellen vertraut. Die Aufbereitung zur Abituraufgabe erforderte die Verwendung der den deutschen Schüler gewohnten Funktionsschreibweise $w(b)$ und $b(t)$. Ein Aufgabenteil zum Zeichnen des Graphen wurde ergänzt. Der Anforderungsbereich der selbständigen Problemlösung wird durch die Ergänzung eines Aufgabenteils aus der Integralrechnung erreicht. Dieser Aufgabenteil erfordert eine kreative Transferleistung und Aufstellung einer Formel (Modellierung). Weiterhin können und sollen die Schüler das Modell überprüfen und bewerten. Integralrechnung ist im Gegensatz zum NRW-Lehrplan nicht Bestandteil des Kurses Wiskunde A.

Abituraufgabe Grundkurs: Freizeitpark

Die Direktion eines Freizeitparks in den Niederlanden arbeitet mit folgendem Modell zur aktuellen Bestimmung der Besucherzahlen an einem Tag in der Hochsaison. Insbesondere bei der Wildwasserbahn ist die Wartezeit w (gemessen in Minuten) abhängig von der Anzahl der Besucher b (gemessen in Tausend Personen), die zu einem bestimmten Zeitpunkt t (gemessen in Stunden) im Park anwesend sind.

$$w(b) = e^{0,05\sqrt{b \cdot 1000}-2}$$

$$b(t) = -0,05t^3 + 1,8t^2 - 19,2t + 62,5$$

Der Freizeitpark ist geöffnet von 10 Uhr morgens bis abends um halb acht, also ist der Definitionsbereich für t: $10 \leq t \leq 19,5$.

a) Berechne die Zahl der Besucher, die an einem Tag der Hochsaison sofort nach Öffnung im Park sind.

b) Zu welchem Zeitpunkt ist die Zahl der Besucher maximal? Wie viele sind es?

c) Zu welchem Zeitpunkt ist der Andrang an den Kassen am größten? Schätze die Zahl der Eintrittskarten, die dann pro Minute verkauft werden.

d) Zeichne den Graphen von $b(t)$ für den Definitionsbereich und erläutere die Sachverhalte der Aufgabenteile a) bis c) am Graphen.

e) Peter stellt sich um 16.30 Uhr bei der Wildwasserbahn an. Wann kann er einsteigen? Paul behauptet am Abend, dass er mindestens eine halbe Stunde an der Wildwasserbahn anstehen musste. Zeige, dass Paul übertrieben hat.

f) Die Direktion ist daran interessiert, die Zahl der Besucher gleichmäßig über den Tag zu verteilen. Die mittlere Auslastung des Parks kann über das Modell eines flächengleichen Rechtecks zur Fläche zwischen dem Graphen von $b(t)$ und der t-Achse bestimmt werden. Stelle eine Formel für die Berechnung der mittleren Auslastung auf und bestimme den Wert. Wie lange wäre dann die maximale Wartezeit an der Wildwasserbahn? Wie schätzen Sie die Möglichkeit der Umsetzung ein?

Lösung der Aufgabe „Freizeitpark“:

a) $b(10) = -0,05 \cdot 10^3 + 1,8 \cdot 10^2 - 19,2 \cdot 10 + 62,5 = 0,5$

d. h. 500 Personen warten vor dem Eingang bei Öffnung des Parks.

b) Gesucht ist ein Extremwert der Funktion $b(t)$.

Dazu $b'(t) = -0,15t^2 + 3,6t - 19,2$

$b'(t) = 0 \iff -0,15t + 3,6t - 19,2 = 0 \iff t_1 = 16$ oder $t_2 = 8 \notin D_b$.

$b''(t) = -0,3t + 3,6$

$b''(16) = -1,2 < 0$ bei $t_1 = 16$ liegt ein Minimum vor.

$b(16) = 11,3$

also ist mit 11300 Personen das Maximum erreicht.

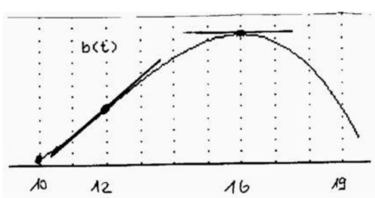
c) Der Andrang an den Kassen ist am größten, wenn die „Steigung“ der Besucherzahlen maximal ist. Die Veränderung der Besucherzahlen zu einer bestimmten Zeit wird durch $b'(t)$ ausgedrückt. Es wird ein Extremwert von $b'(t)$ gesucht.

$b''(t) = -0,3t + 0,6$ $\qquad$ $b''(t) = 0 \iff t = 12$

Da $b'''(12) < 0$ ist, liegt für $t = 12$ ein Maximum von $b'(t)$ vor.

Die „Steigerung“ der Besucherzahlen zum Zeitpunkt $t = 12$ beträgt $b'(12) = 2,4$, also 2400 Personen. Bei 50 Kassen müssten dann 48 Karten in der Minute verkauft werden. Bei 10 Kassen entsprechend 240 Karten/Minute. Wartezeiten werden sich nicht vermeiden lassen.

d) Markante Punkte sind $(10|0,5)$; der Wendepunkt bei $t = 12$ und der Hochpunkt $(16|11,3)$.

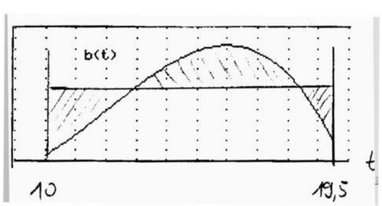


Es ergibt sich für $t = 16,5$:

$b(16,5) = 11,1438$, also ca. 11144 Personen.

$w(11,1438) = e^{0,05\sqrt{11143,8}-2} = 26,5279\,\text{min}$

Peter wird um ca. 16:56 Uhr einsteigen. Die maximale Wartezeit wird beim Maximum der Besucher erreicht (Monotonie der e-Funktion). $w(11,3) = 27,5244\,\text{min}$, folglich wird die halbe Stunde Wartezeit theoretisch nicht erreicht.

e) 

Die mittlere Auslastung berechnet sich mit der Formel

$$\overline{b}(t) = \frac{1}{t_e - t_a} \int\limits_{t_a}^{t_e} b(t)dt$$

.

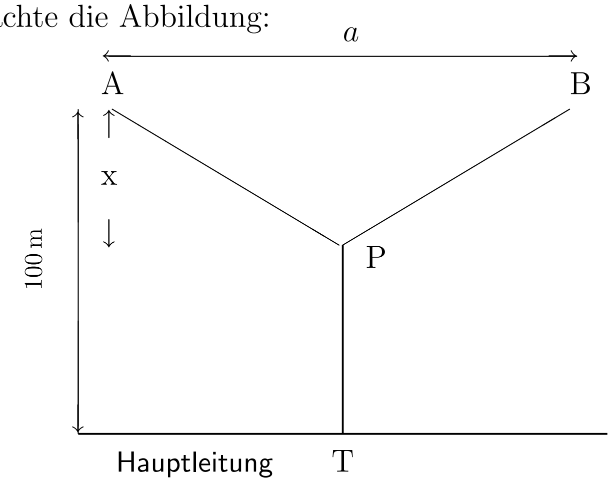
Setze $t_e = 19,5$ und $t_a = 10$.

$$\begin{aligned} \overline{b} &= \frac{1}{9,5} \int\limits_{10}^{19,5} b(t)dt = \frac{1}{9,5} \left[-0,0125t^4 + 0,6t^3 - 9,6t^2 + 62,5t\right]_{10}^{19,5} \\ &= \frac{69,8992}{9,5} = 7,357 \end{aligned}$$

Die Wartezeiten wären dann $w(7,357) = 9,86\,\text{min}$. Vielleicht ist durch eine Werbemaßnahme eine Annäherung an möglich.

3.2 Wasserleitung für zwei Häuser - Abituraufgabe für den Leistungskurs[1]

Die Häuser A und B müssen an die Wasserleitung angeschlossen werden. Die Hauptleitung verläuft in 100 m Abstand von A und B. Anstelle von zwei Abzweigungen von der Hauptleitung, eine zu A hin und eine zu B hin, entschließt man sich zu einer sogenannten „Y-Verbindung“: einer Abzweigung bei T, die sich danach bei P wieder aufteilt in die Abzweigungen nach A und nach B. Die Punkte T und P werden so gewählt, dass sie genauso weit von A wie von B entfernt sind. Den Abstand (in Metern) zwischen A und B nennen wir a, den Abstand zwischen P und der Strecke $\overline{AB}$ nennen wir x, wobei $0 < x < 100$ ist. Betrachte die Abbildung:



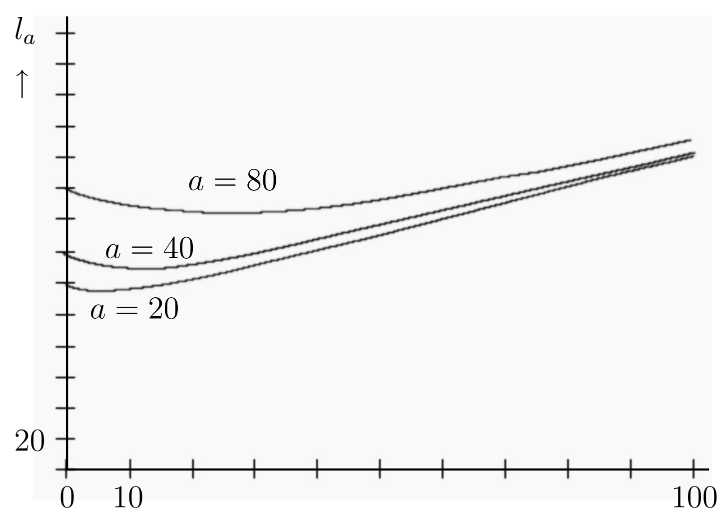
(Abbildung 1)

Die Gesamtlänge (in Metern) der neu anzulegenden Leitungen nennen wir l_a.

Frage 1: (4 Punkte)

Zeige, dass gilt: $l_a(x) = 100 - x + \sqrt{4x^2 + a^2}$

Wir sind an der optimalen Y-Verbindung interessiert – das ist die Y-Verbindung, bei der l_a so klein wie möglich ist. In der Abbildung 2 ist für $a = 20$, $a = 40$ und $a = 80$ der Graf von l_a gezeichnet.



(Abbildung 2)

[1] Keemink, N. C., Thiel, P.: VWO Wiskunde B, Examenbundel 2002/2003. Utrecht, Zutphen 2003, S 138/139

Für jeden Wert $a < 100$ hat l_a ein Minimum. Der dazugehörige optimale x-Wert werde von uns x_{opt} genannt.

Frage 2: (3 Punkte)

Zeige, dass gilt: $$x_{opt} = \frac{1}{\sqrt{12}}\,a.$$

Frage 3: (4 Punkte)

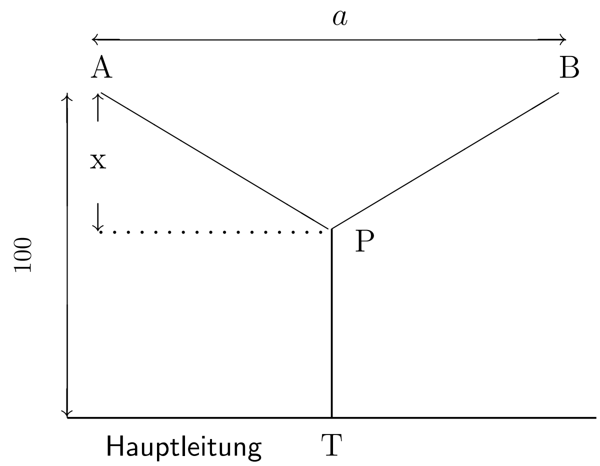
Zeige, dass in der optimalen Situation für den Winkel $\sphericalangle APB$ gilt: $\sphericalangle APB = 120°$.

Wenn die Häuser A und B weit auseinander stehen, ist es billiger, jedes Haus für sich direkt mit der Hauptleitung zu verbinden als eine Y-Verbindung anzulegen. Dann macht man zwei möglichst kurze Abzweigungen von der Hauptleitung.

Frage 4: (5 Punkte)

Berechne, ab welchem Wert von a zwei separate Abzweigungen zusammen kürzer sind als eine Y-Verbindung. Runde die Antwort auf ganze Dezimeter.

Lösung der Aufgabe „Wasserleitung“:



Frage 1: • Bekannt ist: $\overline{PT} = 100 - x$ und $\overline{MA} = \overline{MB} = 0,5a$ (Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist M).

- Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich: $\overline{AP} = \sqrt{x^2 + (0,5a)^2} = \sqrt{x^2 + 0,25a^2}$

- Gesamtlänge: $\begin{aligned} l_a &= \overline{PT} + \overline{AP} + \overline{BP} = \overline{PT} + 2\overline{AP} = 100 - x + 2\sqrt{x^2 + 0,25a^2} \\ &= 100 - x + \sqrt{4x^2 + a^2} \end{aligned}$

Frage 2: • Für den optimalen Wert muss $l_a' = 0$ sein.

- Unter Verwendung der Kettenregel ergibt sich als Term der ersten Ableitung

$$l_a' = -1 + \frac{1}{2}(4x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8x = -1 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + a^2}}$$

- Es muss $l_a' = 0$ gelten. Also folgt $-1 + \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2 + a^2}} = 0$, daher $16x^2 = 4x^2 + a^2$.

  Schlussfolgerung: $x_{opt} = \dfrac{1}{\sqrt{12}}a$ (die Lösung $-\dfrac{1}{\sqrt{12}}\,a$ kommt nicht in Frage, da es keine negativen Längenangaben gibt).

Frage 3: • Zeige, dass $\sphericalangle APM = 60°$ ist (Hälfte des Winkels $\sphericalangle APB$).

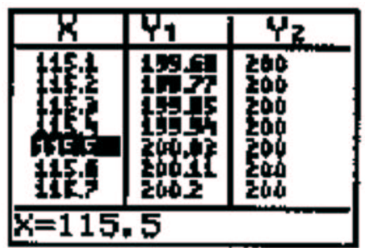
Weil $\quad \tan(\sphericalangle APM) = \dfrac{0,5a}{x} = \dfrac{0,5a}{\dfrac{1}{\sqrt{12}}a} = 0,5 \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3} \quad$ ist,

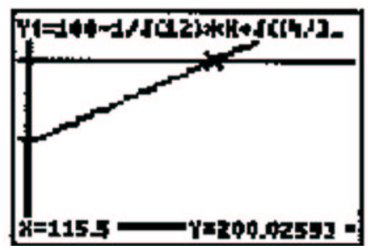
gilt: $\sphericalangle APM = 60°$.

- Schlussfolgerung: $\sphericalangle APB = 2 \cdot \sphericalangle APM = 120°$

Frage 4: • Die Länge von zwei separaten Abzweigungen ist 200 Meter.

- Für die Länge der günstigsten Y-Verbindung $l_a = 100 - x + \sqrt{4x^2 + a^2}$ gilt $x = \dfrac{1}{\sqrt{12}}a$ (vgl. Frage 2).
- Für die günstigste Y-Verbindung gilt nun: $l_a = 100 - \dfrac{1}{\sqrt{12}}a + \sqrt{\frac{1}{3}a^2 + a^2}$.
- Bestimme unter Verwendung eines grafikfähigen Rechners mit Hilfe eines Grafen oder einer Tabelle, für welchen Wert von a gilt: $l_a = 200$.





- Schlussfolgerung: Von $a = 115,5$ Metern an ist die Gesamtlänge für zwei separate Abzweigungen kleiner.
- Anmerkung: Der Graf von l_a ist eine Gerade, denn
  $l_a = 100 - \dfrac{1}{\sqrt{12}}a + \sqrt{\frac{1}{3}a^2 + a^2} = 100 - 0,2887a + 1,1547a \approx 100 + 0,866a.$

Überlegungen zur Übernahme dieser Aufgabe in den Abiturvorschlag für einen Leistungskurs Mathematik

Themenbereich: Analysis: Wurzelfunktion, Pythagoras, Aufstellen einer Funktion, Extremwertberechnung, Kettenregel, Termumformungen

	Lernvoraussetzungen	**Bemerkungen**
Frage 1	Satz des Pythagoras, Termumformungen, Wurzelfunktion	Interpretation einer Skizze
Frage 2	Ableitung einer Wurzelfunktion mit Parameter, Extremwertberechnung	Extremwertberechnung ohne Verwendung der 2. Ableitung, Informationsverwertung aus Grafik/Text
Frage 3	Rechtwinkliges Dreieck / Definition des Tangens	
Frage 4	Rechnerischer Umgang mit Funktionstermen	
Frage 5	Lösen einer Ungleichung	Interpretation einer Skizze, evtl. GTR

- Der Kurs hatte nicht mit einem grafikfähigen Rechner gearbeitet, also konnte die Aufgabe 4 nicht in der oben angegebenen Art und Weise gelöst werden. Die Frage 4 wurde umformuliert zu einer Aufgabe, die ohne grafikfähigen Rechner bearbeitet werden musste.

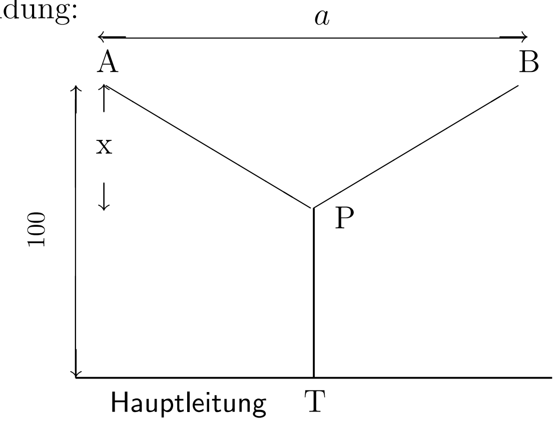
- In der niederländischen Aufgabe fehlt der Bereich der Integralrechnung. Es erschien daher sinnvoll, einen Aufgabenteil hinzuzufügen. Da es in der Aufgabe schon einen Funktionsterm mit Wurzel gab, bot es sich an, eine Wurzelfunktion zu wählen. Es kam hinzu, dass der Graf dem klassischen Verständnis eines Wassertropfens nahekommt.

- Aus Überlegungen zu der den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung stehenden Arbeitszeit heraus ergab sich die Notwendigkeit, den Aufgabenteil 3 (Frage 3) herauszunehmen.

- In Anpassung an die in NRW übliche Form wurde die Aufgabe in die Aufgabenteile a) bis e) unterteilt.

Abituraufgabe Leistungskurs: Wasserleitung

Die Häuser A und B müssen an die Wasserleitung angeschlossen werden. Die Hauptleitung verläuft in 100 m Abstand von A und B. Anstelle von zwei Abzweigungen von der Hauptleitung, eine zu A hin und eine zu B hin, entschließt man sich zu einer sogenannten „Y-Verbindung“: einer Abzweigung bei T, die sich danach bei P wieder aufteilt in die Abzweigungen nach A und nach B. Die Punkte T und P werden so gewählt, dass sie genauso weit von A wie von B entfernt sind. Den Abstand (in Metern) zwischen A und B nennen wir a, den Abstand zwischen P und der Strecke AB nennen wir x, wobei $0 < x < 100$ ist. Betrachte die Abbildung:

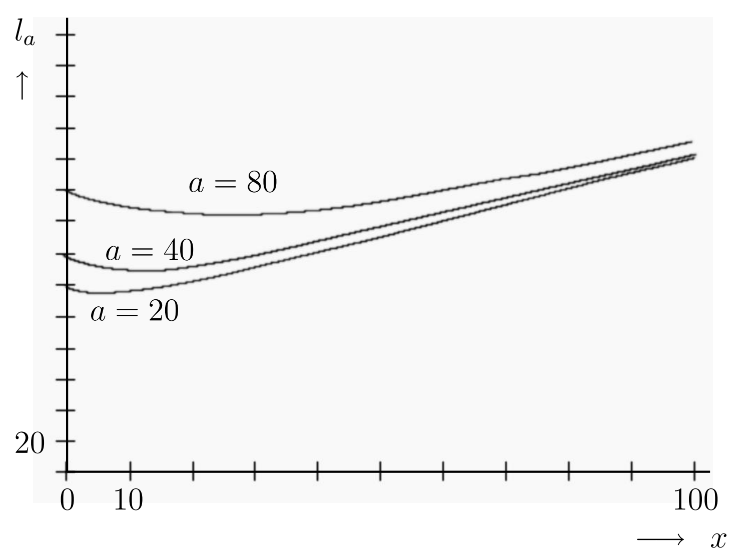


(Abbildung 1)

Die Gesamtlänge (in Metern) der neu anzulegenden Leitungen nennen wir l_a.

a) Zeige, dass gilt: $l_a = 100 - x + \sqrt{4x^2 + a^2}$

Wir sind an der optimalen Y-Verbindung interessiert – das ist die Y-Verbindung, bei der l_a so klein wie möglich ist. In der Abbildung 2 ist für $a = 20$, $a = 40$ und $a = 80$ der Graph von l_a gezeichnet.



(Abbildung 2)

Für jeden Wert $a < 100$ hat l_a ein Minimum. Der dazugehörige optimale x-Wert werde von uns x_{opt} genannt.

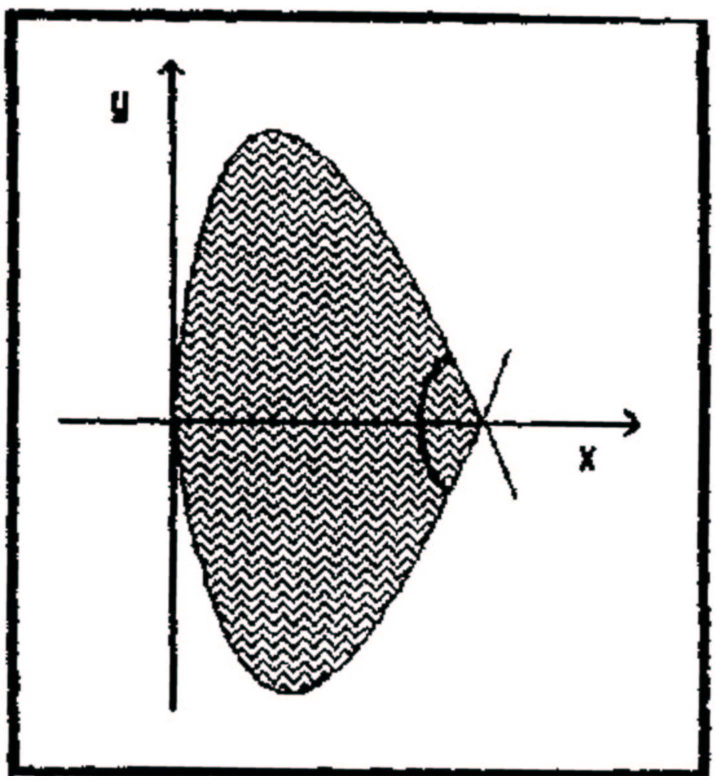
b) Zeige, dass gilt: $x_{opt} = \frac{1}{\sqrt{12}}\, a.$

c) Zeige unter Verwendung der Lösung aus b), dass sich für die günstigste Y-Verbindung ergibt: $l_a = 100 + 0,866\, a.$

Wenn die Häuser A und B weit auseinander stehen, ist es billiger, jedes Haus für sich, direkt mit der Hauptleitung zu verbinden als eine Y-Verbindung anzulegen. Dann macht man zwei möglichst kurze Abzweigungen von der Hauptleitung.

d) Berechne, ab welchem Wert von a zwei separate Abzweigungen zusammen kürzer sind als eine Y-Verbindung. Runde die Antwort auf ganze Dezimeter.

e) Der Graph der Funktion $f(x) = (6 - x) \cdot \sqrt{x}$ erzeugt bei Drehung um die x-Achse zwischen den Nullstellen $x = 0$ und $x = 6$ einen „Wassertropfen“. Zum besseren Verständnis ist eine grobe Skizze der Figur wiedergegeben.



(Abbildung 3)

Berechne die Fläche zwischen dem Schaubild der Funktion und der x-Achse im Bereich $[0; 6]$ und das Volumen des Tropfens in diesem Bereich.

Lösung zu a) und b) vergleiche oben

c)
- $l_a(x) = 100 - x + \sqrt{4x^2 + a^2}$
- Die günstigste Verbindung erhalte ich, wenn ich für x den Wert $x_{opt} = \frac{1}{\sqrt{12}}a$ einsetze (vgl vorher).
- $$\begin{aligned} l_a(x_{opt}) &= 100 - \frac{1}{\sqrt{12}}a + \sqrt{4(\frac{1}{\sqrt{12}}a)^2 + a^2} = 100 - \frac{1}{\sqrt{12}}a + \sqrt{\frac{4}{12}a^2 + a^2} \\ &= 100 - \frac{1}{\sqrt{12}}a + \sqrt{\frac{4}{3}a^2} = 100 - \frac{1}{\sqrt{12}}a + \frac{4}{\sqrt{12}}a \\ &= 100 + \frac{3}{\sqrt{12}}a \\ &\approx 100 + 0,866\,a \end{aligned}$$

d)
- Die Gesamtlänge von zwei separaten Abzweigungen ist 200 Meter. Die günstigste Verbindung wird durch die lineare Funktion $l_a = 100 + 0,866\,a$ beschrieben.
- Wann gilt also $l_a < 200$?
  $l_a < 200 \Longleftrightarrow 100 + 0,866\,a < 200 \Longleftrightarrow 0,866\,a < 100 \Longleftrightarrow a < 115,47$
  Ab einem Abstand von $115,5$ m zwischen den Punkten A und B sind separate Anschlüsse kürzer.

e)
- Entweder mit Hilfe der partiellen Integration ($u(x) = 6 - x$ und $v'(x) = \sqrt{x}$) oder mit Hilfe von Substitution lässt sich das Integral berechnen mit dem Wert $A = 23,52$ FE.
  Volumenberechnung unter Verwendung der Formel und unter Beachtung der binomischen Formel ergibt als Wert für das Volumen:
  $V = 108 \cdot \pi \approx 339,29$ VE.

Kapitel 4

Allgemeine Fertigkeiten

4.1 Der Umgang mit Informationen als Thema des Mathematikunterrichts

Zum Erwerb der international verständlichen Sprache der Mathematik und ihrer Kommunikationsmöglichkeiten ist es in unserer Informationsgesellschaft unerlässlich, mit Texten, Graphiken, Diagrammen und Tabellen sinnvoll und kritisch umgehen zu können. Die Ergebnisse der PISA-Untersuchung legen nahe, dass auch der Mathematikunterricht einen Beitrag zur Förderung des Leseverständnisses leisten sollte. Die Schülerinnen und Schülersollen lernen, aus unterschiedlichsten, zum großen Teil auch diskontinuierlichen Texten Informationen zu entnehmen. Anschließend sollen sie die Informationen in einem Modell verarbeiten und die gewonnen Ergebnisse auf den realen Kontext zurückbeziehen. Hierzu lassen sich im Nachbarland viele interessante Beispiele finden, die diese Haltung unterstützen und als interessante Materialien bei uns Verwendung finden sollten.

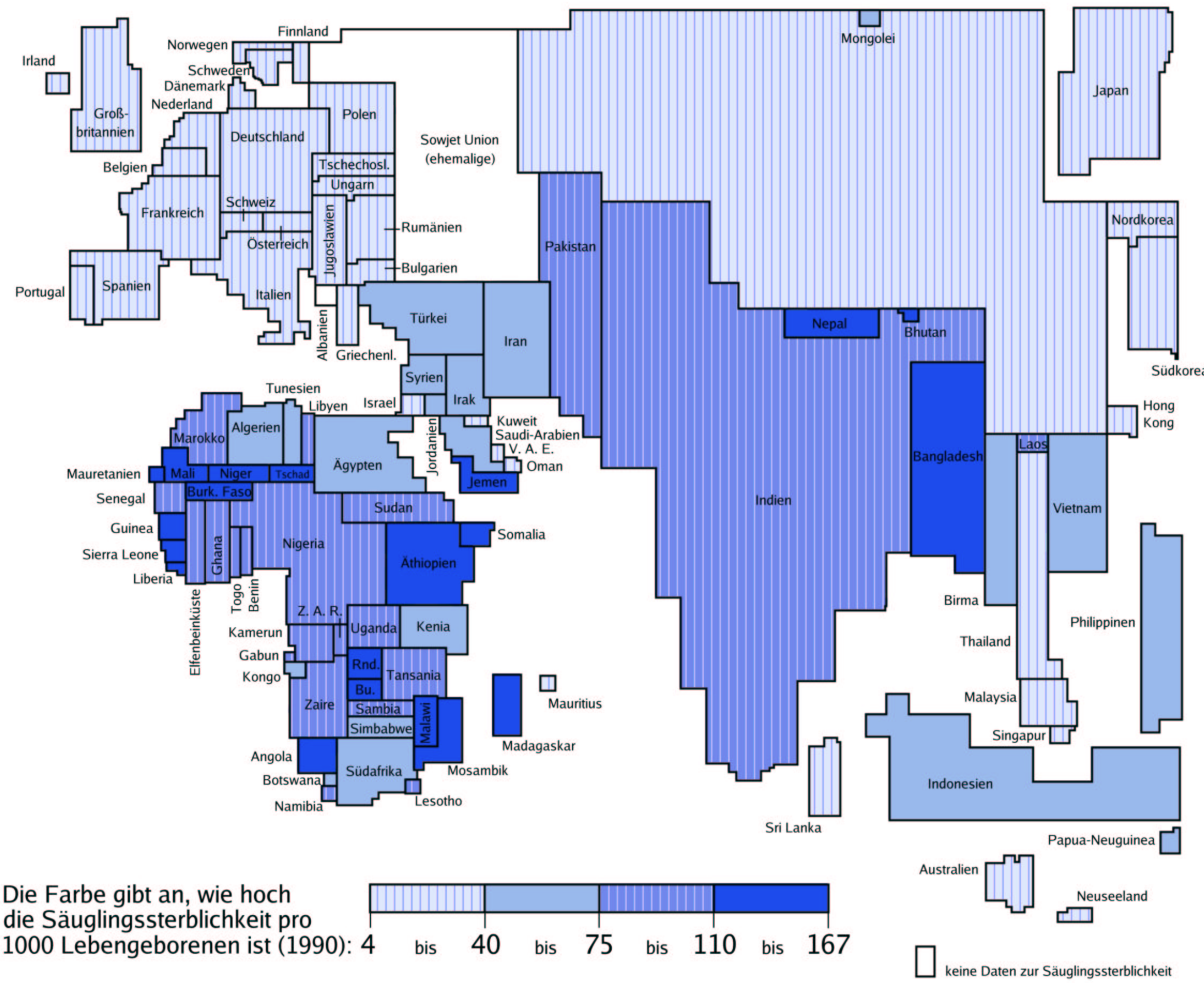
Im Sinne der Ziele einer RME (realistic mathematics education), wie sie als Leitgedanke dem niederländischen Mathematikunterricht zu Grunde liegt, wird in allen mathematischen Teilgebieten und durch alle Jahrgangsstufen hindurch das Arbeiten in wirklichkeitsnahen Kontexten thematisiert. Es sind authentische Kontexte aufbereitet und in Aufgaben eingearbeitet worden, die das Umgehen mit Informationen aus den verschiedensten Fachgebieten innerhalb des Mathematik-Unterrichts trainieren.

Die Aufgaben sind i. Allg. so aufgebaut, dass die SchülerInnen in kleinen Schritten herangeführt werden, relevante Informationen aus den dargebotenen Texten, aus Landkarten, Graphiken oder Tabellen zu entnehmen und in den Zusammenhängen zu argumentieren, die der jeweiligen Problemstellung dienlich sind. Die SchülerInnen lernen den Kontext durch einführende Fragen kennen. Sie erarbeiten Lösungen, bringen diese wieder in den Kontext ein und sind gehalten, ihre Ergebnisse in Bezug auf den Kontext auch kritisch zu überprüfen. Spätere Fragen führen bei vielen Aufgaben auf komplexere mathematische Fragestellungen, an die sich weitere Querverweise zu anderen Stoffgebieten anschließen können. Alle Aufgaben gehen von realen Daten und authentischen Zusammenhängen aus und vermitteln „ganz nebenbei“ viel neues Wissen aus anderen Fächern. Die Schülerinnen und Schülerlernen also im Mathematikunterricht, Grafiken zu lesen, gewünschte Informationen zu extrahieren, sie zu deuten und damit über die Grenzen des Faches hinaus korrekt umzugehen.

Als Beispiel aus einem niederländischen Schulbuch für das 7. Schuljahr folgt die Aufgabe „Säuglingssterblichkeit“. Sie ist dem Kapitel „Umgang mit Informationen“ entnommen, in dem auch Flussdiagramme, Fahrpläne, Tabellen zu verschiedenen Inhalten, unterschiedliche Darstellungsformen von Grafen und Stammbäume als gerichtete Grafen behandelt werden.

Beispielaufgabe Säuglingssterblichkeit

Hier ist eine merkwürdige Landkarte abgebildet. Wie man sieht, stimmen die Größen der Länder nicht mit einer üblichen Landkarte überein. Die Größe eines Landes hängt mit seiner Einwohnerzahl zusammen. Je größer ein Land gezeichnet ist, desto mehr Einwohner hat es.



a) Nenne fünf Länder, die größer als auf der normalen Karte sind.

b) Nenne fünf Länder, die kleiner als auf der normalen Karte sind.

c) Welche Erdteile sind größer, welche kleiner als auf üblichen Karten?

d) Schätze mit Hilfe dieser Karte, wie viel mal soviele Einwohner Groß-Britannien im Vergleich zu Belgien hat.

e) Portugal hatte im Jahr 1990 etwa 10 Millionen Einwohner. Wie viele Einwohner hatte Spanien ungefähr?

Diese Karte enthält auch Informationen über Säuglingssterblichkeit.

a) Was versteht man unter Säuglingssterblichkeit?

b) In welchen Ländern ist die Säuglingssterblichkeit am höchsten?

c) In welchem Erdteil ist es am schlechtesten um die Babys bestellt?

d) Ist es möglich, zu dieser Karte einen Grafen zu zeichnen? Erläutere!

4.2 Fragen stellen im Mathematikunterricht

Offene Aufgaben im Mathematikunterricht regen die Eigenaktivität der Schülerinnen und Schüler an und helfen, mathematische Lerninhalte untereinander sowie mit unterschiedlichen lebensrelevanten Fragen zu vernetzen. Sie lassen unterschiedliche Lösungswege und eventuell sogar unterschiedliche Lösungen zu. Wer kreativ und damit selbstbestimmt seinen Gedankengang wählen möchte, muss in der Lage sein unterschiedliche Fragemöglichkeiten zu erkennen. Das selbstständige Stellen von Fragen ist also eine wichtige Voraussetzung für den kreativen Umgang mit offenen Aufgaben, und der offenste Aufgabentyp besteht in dem Auftrag, selbst eine angemessene Fragestellung zu finden.

Das selbständige Stellen von Fragen ist eine wesentliche Lernstrategie: „Fragen sind gleichsam Klebepunkte im Gedächtnis, an die die erfragten Informationen angelagert werden.“ [1] In einem kleinen ABC des Fragens gibt Klippert Arbeitsmaterialien zum systematischen Erlernen und Üben des Stellens von Fragen.

Im Vergleich hierzu ist der Zugang im niederländischen Mathematikbuch „Getal en Ruimte, VWO3“ [2] weniger systematisch, aber offener und anspruchsvoller. Den Schülerinnen werden unterschiedliche Fragetypen vorgestellt. Dabei wird eine Unterscheidung zwischen offenen und geschlossenen Fragen eingeführt. Den Schülern wird deutlich gemacht, dass offene Fragen vor allem aus der Sicht des Fragestellers relevant sein müssen. Um das Fragen zu üben, muss die Antwort auf die Frage zunächst nicht unbedingt in Angriff genommen werden. Diese beiden letztgenannten Aspekte ermutigen zum Stellen von Fragen. Es folgen Anregungen, die in besonderer Weise dazu einladen, Fragen zu stellen. Schließlich wird auch die Bearbeitung der selbstgestellten Fragen einführend angeleitet.

Der hier vorgestellte Lehrbuchtext ist also Motivation und Anregung, das Stellen von Fragen zu üben. Im niederländischen Schulbuch hat dieses Kapitel neben anderen Kapiteln zu „Allgemeinen Fertigkeiten“ die Funktion, Schülerinnen und Schüler auf die „zweite Phase“ (entspricht der deutschen Oberstufe) vorzubereiten, in der das selbständige Arbeiten ein wesentlicher Bestandteil ist.

[1] Klippert, Heinz: Methodentraining. Weinheim und Basel 1994, S. 128
[2] Vuijk, R.A.J. et al.: Getal en Ruimte, 3V1, voor het deerde leerjaar vwo. Houten 2000

Beispiel: Fragen stellen

Auftrag:

Das Foto von der Schiffsschraube auf dem nebenstehenden Foto erschien im niederländischen Handelsblatt NRC vom 13. Oktober 1997.
Schreibe zwei Fragen auf, die sich dir stellen, wenn du das Foto betrachtest.

Die enorme Schiffsschraube auf dem Foto erregt Verwunderung. Wenn jemand verwundert ist, dann spuken Fragen durch seinen Kopf wie z. B.

- Wie schwer ist die Schiffsschraube?
- Was sind ihre Ausmaße?
- Wo wurde sie hergestellt?
- Mit welcher Geschwindigkeit fährt der Transporter? Wohin fährt er?

Auf diese Fragen gibt es jeweils genau eine Antwort. Es geht immer um Fakten. Du hast es hier mit **geschlossenen Fragen** zu tun. Aber es können auch **offene Fragen** gestellt werden. Dies sind Fragen, die eine Meinung oder eine Argumentation verlangen, wie z. B.

- Ist der Transport im Zusammenhang mit Stauproblemen zulässig?
- Muss eine Obergrenze für den Tonnengehalt von Öltankern eingeführt werden?

Ein Kennzeichen offener Fragen ist, dass sie mehr als eine Antwort zulassen. Deshalb ensteht durch solche Fragen eine größere Unsicherheit. Ein Vorteil offener Fragen ist, dass diese mehr Möglichkeiten bieten sich selbst einzubringen und die eigenen Interessen zu vertiefen.

Untersuchungen haben bewiesen, dass es sinnvoll ist, wenn du dir beim Lernen selbst Fragen stellst. Indem du dich selbst etwas fragst und auf die Suche nach einer Antwort begibst, aktivierst du dich selbst und kannst den Lehrstoff besser behalten. Deshalb gehört das selbstständige Stellen von Fragen zu den wichtigen **allgemeinen Studierfertigkeiten**.

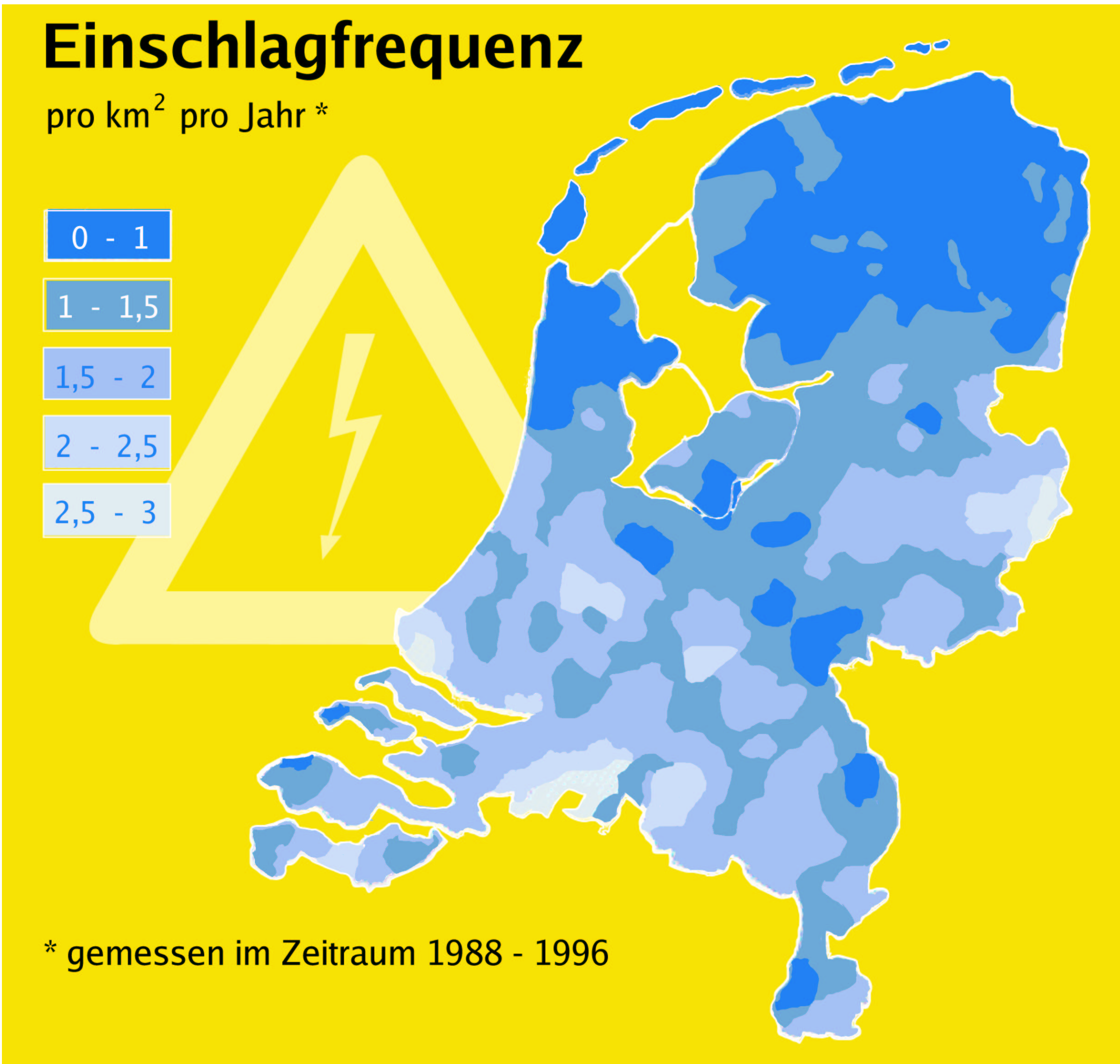
In den folgenden Aufgaben werden fünf Themen angeschnitten. Zu jedem Thema musst du vier Fragen stellen, von denen mindestens zwei von offenem Charakter sind. Strebe an, dass

- die Fragen sich auf unterschiedliche Aspekte des Themas beziehen
- in mindestens einer Frage Mathematik eine Rolle spielt.

Du musst die Fragen nicht beantworten.

Themen

a) **Donner und Blitz**

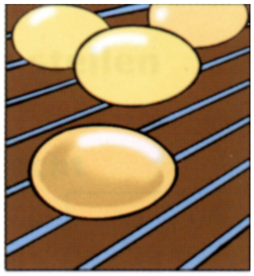


Laut Wetterinstitut gab es im Juni 1997 acht Tage mit Gewittern, das ist etwas mehr als der Durchschnitt. Im Juli hat es schon zweimal so viel gedonnert und geblitzt wie normalerweise in diesem Monat.

Das niederländische Prüflabor für Hochspannung und elektronische Materialien Kema registriert seit 1988 alle Blitzeinschläge in den Niederlanden. Ein Blitzeinschlag verursacht ein charakteristisches Radiosignal (auch im Radio in den Mittelwellensendern zu hören), das von fünf Peilstationen aufgenommen wird. Aus den Zeitunterschieden, mit denen das Signal die unterschiedlichen Stationen erreicht, kann der Einschlagort exakt bestimmt werden.

b) Das Leben eines Schlachthuhns

-30-ster

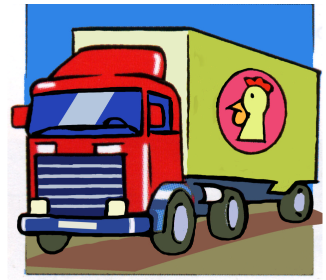


Ei wird befruchtet und in der Maschine ausgebrütet

0-ter

Küken schlüpft aus dem Ei (55-60 Gramm)

erster

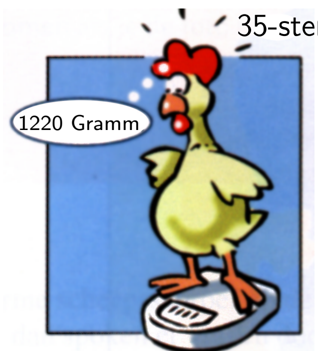


Transport zum Hühnermastbetrieb; kommt in einen großen Stall mit viel Licht

28-ster

Temperatur wird von 35°C auf 18°C abgebaut

35-ster



zwischenzeitliches Wiegen: Normalgewicht 1220 Gramm

42-ster

Transport zum Schlachthaus; Huhn geschlachtet

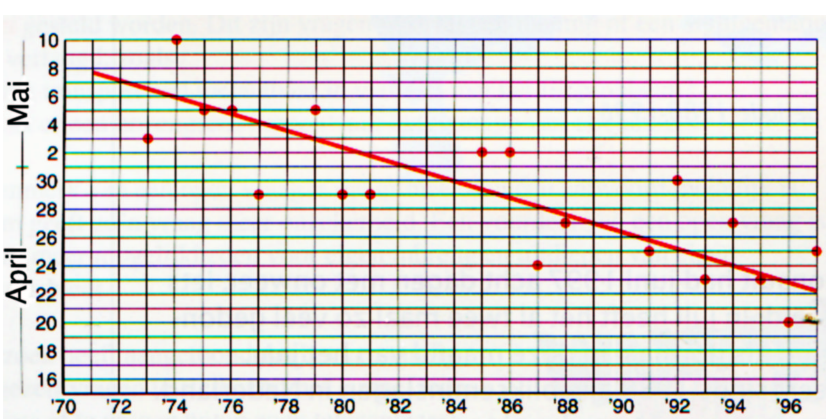
43-ster bis 45-ster

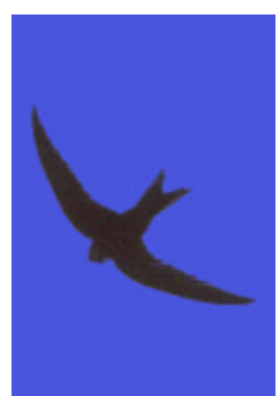
Transport zum Geflügelhändler zur weiteren Verarbeitung

Tag

verpackt für den Verbrauch

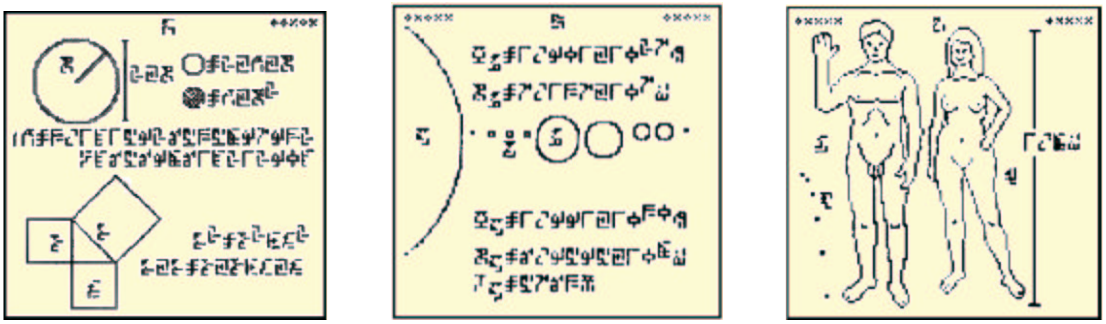
c) Erster Mauersegler in Amsterdam



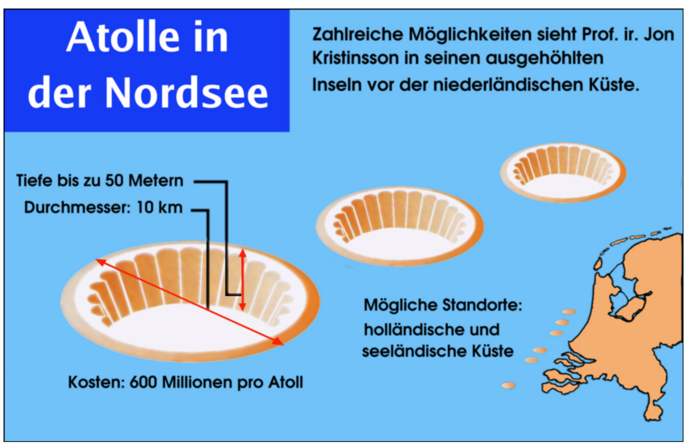


d) **Weltraumbotschaft**

Der kanadische Astrophysiker Yvan Dutil hat im Frühjahr 1999 von einer Radiosternwarte in der Ukraine aus eine 23-seitige Botschaft in den Weltraum gesendet. Die folgende Abbildung zeigt die Seiten 5, 11 und 15 der Botschaft.



e) **Die „schwindelerregenden Möglichkeiten von Atollen“**



Hast du einmal die Fragen zu einem Thema formuliert, dann beginnt die Phase der Informationssuche. Die Bibliothek ist der geeignete Ort um zu beginnen. In Enzyklopädien und Zeitschriften sind häufig zu jedem Thema Informationen zu finden.

Wenn du Zugang zu einem Computer mit Internetanschluss hast, dann kannst du allerlei Daten im „world wide web“ erfragen. Das Informationsangebot ist überwältigend und reicht von reiner Reklame bis hin zu komplizierten wissenschaftlichen Artikeln. Es ist eine Kunst, mit der geeigneten Suchmaschine anzufangen. Versuche es mit unterschiedlichen Suchwörtern oder Kombinationen von Suchwörtern. Wechsel auch einmal die Suchmaschine.

Eine Suchmaschine durchsucht in stillen Stunden eine große Anzahl von Internetseiten und legt Listen davon an. Gibst du in die Suchmaschine ein oder mehrere Suchwörter ein, dann erhältst du eine Liste von Internetseiten sowie kurze Beschreibungen hierzu. Gehst du diese Liste durch, dann bekommst du schnell eine Vorstellung davon, welche Seiten der Mühe wert sind. Beispiele für Suchmaschinen sind Altavista, Yahoo und Google.

Auftrag:

Wähle eines der fünf oben vorgestellten Themen aus. Versuche im Internet Informationen zu finden, mit denen du deine gestellten Fragen beantworten kannst. Verarbeite das Ganze zu einer schriftlichen Arbeit.

Kapitel 5

Schülerwettbewerbe

5.1 A-lympiade

Allgemeine Vorbemerkungen

Zur niederländischen A-lympiade gibt es im deutschen Bildungswesen keine Entsprechung:

- Als Wettbewerb spornt sie zu hoher Leistungsbereitschaft an und ermöglicht durch ihren spielerischen Charakter Anerkennung der Leistung anderer, Wertschätzung der eigenen Leistung und damit auch ein „gutes Verlieren“. Hierdurch wird viel Freude an der Ausübung von Mathematik vermittelt.

- Der Teamgedanke hilft den Schülerinnen und Schülern eigene Stärken zu entdecken, sich gegenseitig anzuspornen und den gemeinsamen Erfolg miteinander zu teilen. So wird soziales Lernen gestärkt und eine hohe Motivation geschaffen, die gestellten Probleme zu bearbeiten.

- Die Aufgaben genügen den Forderungen der Wiskunde A in besonderer Weise.

Die Aufgaben der A-lympiade behandeln komplexe, sehr offene und anwendungsorientierte Problemstellungen. Es werden dabei keine Vorkenntnisse aus der zweiten Phase (das sind die beiden bzw. drei letzten Schuljahre vor dem Endexamen) vorausgesetzt. Neben dem Aspekt der Problemlösung betonen diese Aufgaben

- die Analyse von Problemstellungen und die Angabe logischer Beziehungen zwischen Daten, Behauptungen und Ergebnissen,

- selbstständige mathematische Modellierung,

- eine angemessene Wahl der mathematischen Arbeitsweise und

- eine Beurteilung und Interpretation rechnerischer Ergebnisse sowie Beachtung der in der gegebenen Situation relevanten Genauigkeit.

Dies sind wesentliche Forderungen des Konzeptes von Wiskunde A. So soll versucht werden, „den Teufelskreis zwischen ‚schlechten' Examensaufgaben und ‚schlechtem' Unterricht aufzubrechen"[1]. In den sehr stark geschlossenen Aufgaben des Examens und der entsprechenden unterrichtlichen Vorbereitung auf dieses Examen kommt der Prozesscharakter der Mathematik zu wenig zur Geltung. Die Schülerlösungen bei der A-lympiade zeigen, dass die Schülerinnen und Schüler oft ausschließlich auf „die Lösung" hinarbeiten, „anstatt zu argumentieren und getroffene Entscheidungen zu verantworten. [...] Bei der Vorrunde 1998-1999 [...] [wurde Z. B.] ein Beurteilungssystem mit sinnvoller, vertretbarer Begründung erwartet; die Schüler bringen alle ein Beurteilungssytem, erklären aber nicht, warum es gerade so aussieht, welche Entscheidungen sie warum getroffen haben, warum ihre Lösung ihrer Meinung nach das beste System ist. Die Beschreibung dieses Entscheidungsprozesses ist bei der Wiskunde A-lympiade viel interessanter als das System selbst, aber immer wieder zeigt sich, dass die Schüler selbst mehr an dem Produkt als an dem Prozess interessiert sind."[2]

Die A-lympiade wurde für Schülerinnen und Schüler aus dem niederländischen Wiskunde A-Zweig ins Leben gerufen und wird vom Freudenthal Institut der Universität Utrecht organisiert. Sie hat sich allerdings zu einem internationalen Teamwettbewerb entwickelt, und so nehmen mittlerweile Teams aus unterschiedlichen Nationen – seit 2001 auch aus Nordrhein-Westfalen – an der A-lympiade teil. Der Wettbewerb findet seit dem Schuljahr 1989/1990 jährlich statt und wird in zwei Runden abgehalten. Die Vorrunde wird schulintern in einen Zeitraum von sieben Stunden durchgeführt, die Finalrunde wird an einem Wochenende in den Niederlanden abgehalten.

Die Bewertung der eingereichten Arbeiten wird durch ein Ranking-System vorgenommen, bei dem alle betreuenden Lehrerinnen und Lehrereine gewisse Anzahl von Arbeiten in eine Rangfolge bringen. Aus diesen Rangfolgen wird eine Rangfolge für alle eingereichten Arbeiten ermittelt und damit werden dann die Teilnehmerinnen und Teilnehmerder Finalrunde ermittelt. Die Bewertungskriterien, nach denen die Lehrerinnen und Lehrerdie Rangfolgen erstellen, werden auch den teilnehmenden Teams mitgeteilt. In der Vorrunde 2003 waren sie folgendermaßen formuliert:

„Bei der Bewertung Ihrer Arbeit werden folgende Aspekte beachtet:

- Vollständigkeit
- der Gebrauch von Mathematik
- die Qualität der Gedankenführung und der Begründungen Ihrer Entscheidung; ob die Lösungen einen Sinn für die Realität zeigen, kann auch ein Aspekt sein
- die Klarheit der beschriebenen Vorschläge, der Argumentation und ebenso der Handreichung, aber auch die Gründlichkeit der Arbeit
- die Lesbarkeit, der Aufbau, das Layout und die äußere Form etc."

[1] zitiert nach: „Wiskunde A-lympiade" in „Blick über den Zaun", www.learn-line.nrw.de/angebote/medienmathe/verweise/nl

[2] de Haan, Dédé: 10 jaar Wiskunde A-lympiade, de opstap naar de twede fase. Utrecht 1999

Da die Aufgaben sehr offen gestellt sind und auch die Bewertungskriterien von offenem Charakter sind, lässt sich für A-lympiade-Aufgaben keine eindeutige Musterlösung angeben. In diesem Kapitel wird allerdings in einem Beispiel gezeigt, wie man mit der Problemstellung im Sinne des Wettbewerbs umgehen und zu einer Lösungsmöglichkeit kommen kann.

Mathematik A-lympiade: Vorrunde 1999-2000

Glatteis in Zeist

Einleitung

Glatteis ist in den Niederlanden ein merkwürdiges Ereignis. Im Winter regnet es manchmal, während der Boden noch gefroren ist. Das Regenwasser gefriert dann in dem Moment, in dem es auf die Erde kommt. Es bildet sich sofort ein Eisbelag auf den Wegen. Weil es so plötzlich passieren kann, entstehen dabei oft lebensgefährliche Situationen.

Wenn Glatteis droht, muss so schnell wie möglich gehandelt werden, um zu verhindern, dass der Straße vereist. Man kann dies tun, indem man Salz auf den Straße streut. Salz setzt den Gefrierpunkt von Wasser herab, so dass das Regenwasser nicht gefriert. Mit Salz beladene Lastwagen, die Streuwagen, streuen Salz auf die Straßen. Da Glatteis so plötzlich auftreten kann, muss so schnell wie möglich gearbeitet werden.

Problematik in Zeist

Wenn Glatteis droht, muss in Zeist so effizient wie möglich gestreut werden. In Zeist wird diskutiert, welches System in der heutigen Situation so effizient wie möglich ist und wie es eventuell noch verbessert werden kann.

Gegebenheiten und Randbedingungen

Zeist ist ein größerer Ort bei Utrecht. Die Einwohner sind zum größten Teil Pendler. Auf der beiliegenden Karte siehst du, dass im Norden und im Süden von Zeist zwei verschiedene Autobahnen verlaufen (die A28 und die A12). Das Gebiet dazwischen (außer den Nebenstraßen in Bunnik, links unten auf der Karte) ist das zu bestreuende Gebiet. In diesem Gebiet sind „Hauptstraßen“ hellgrau eingezeichnet, wie z.B. die „Griftlaan“ in Feld B4. Die „gewöhnlichen Straßen“ sind weiß. Ein voller Streuwagen fährt auf einer Autobahn durchschnittlich mit 60 km/h, auf den Hauptstraßen durchschnittlich 30 km/h und auf den Straßen in den Wohnbezirken durchschnittlich 15 km/h. Ein nicht streuender Wagen fährt entsprechend 80 km/h, 40 km/h und 20 km/h.

Ein voller Streuwagen kann ungefähr 10 Kilometer Straße bestreuen. Ein leerer Streuwagen wird vom Salzdepot aufs Neue beladen. Das Auffüllen eines Streuwagens dauert 10 Minuten. Zeist besitzt zwei Streuwagen, die im Industriegebiet stehen (alle schraffierten Flächen auf der Karte sind Industriegebiet). Hier befindet sich auch das Salzdepot. Das Industriegebiet mit dem Salzdepot und den Streuwagen ist das schraffierte Gebiet auf der Karte in der rechten unteren Ecke von C2.

Aufgabe I: Die heutige Situation

Für den Augenblick, in dem Glatteis droht, muss natürlich ein Streuplan bereitliegen, der unter anderem eine Straßenkarte oder Wegbeschreibung für die Fahrer enthält.

Für die Gemeinde ist es wichtig, dass der Streuplan effizient ist. Formuliere, was du unter einem effizienten Streuplan verstehst und entwirf einen Plan, der nach deiner Erklärung so effizient wie möglich ist. Schreibe auch auf, wie du auf diesen Plan gekommen bist.

Du solltest nicht versuchen den Plan durch Ausprobieren und anschließendes Betrachten der Ergebnisse zu finden. Es wird erwartet, dass du auf eine gut durchdachte und pfiffige Weise zum Entwurf deines Streuplanes kommst. (Stelle realistische Annahmen auf der Grundlage der gegebenen Informationen und weiterer vernünftiger Annahmen auf).

Aufgabe II: Ein umfassendes Gutachten

Die Gemeinde Zeist fordert ein Gutachten über die Möglichkeiten zur Erhöhung der Effizienz beim Streuen an. Sie möchte dieses Gutachten in einer Diskussion über eine eventuelle Verstärkung der Zahl der Streuwagen oder Erhöhung der Anzahl von Salzdepots verwenden. Eventuell sind noch weitere effizienzsteigernde Maßnahmen zu berücksichtigen.

An euch geht der Auftrag dieses Gutachten zu erstellen. Selbstverständlich ist hierbei vor allem die Untermauerung eurer Ergebnisse von Belang.

Das Gutachten muss auf jeden Fall die folgenden Abschnitte enthalten:

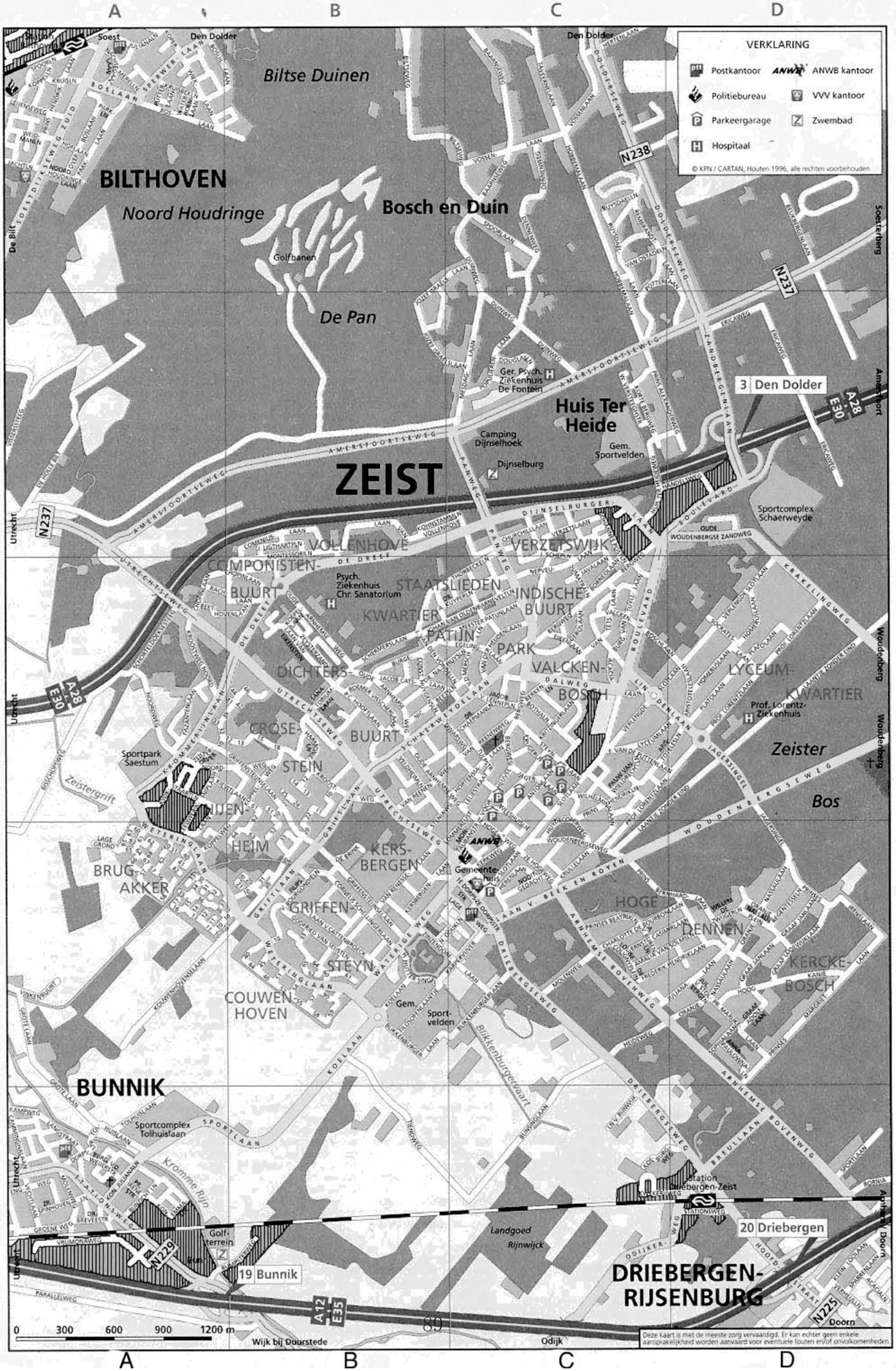
- *Analyse der heutigen Situation*

  Hier werden die Ergebnisse der Aufgabe I dargestellt. Gleichzeitig nennt ihr hier die Knackpunkte, die euch begegnet sind.

- *Vorschläge zur Erhöhung der Effizienz*

  In diesem Teil gebt ihr Ratschläge zu möglichen Anpassungen der Situation, durch welche die Effizienz gesteigert werden kann.

  Benennt die Abwägungen, die für die effizienzsteigernden Maßnahmen eine Rolle spielen.


VERKLARING
Postkantoor
ANWB kantoor
Politiebureau
VVV kantoor
Parkeergarage
Zwembad
Hospitaal
© KPN / CARTAN, Houten 1996, alle rechten voorbehouden
A
B
C
D
1
2
3
4
5
BILTHOVEN
Noord Houdringe
Biltse Duinen
Bosch en Duin
Golfbanen
De Pan
Den Dolder
Soest
De Bilt
Soesterberg
Amersfoort
N238
N237
A28
E30
3 Den Dolder
Ger. Psych. Ziekenhuis De Fontein
Huis Ter Heide
Camping Dijnselhoek
Dijnselburg
Gem. Sportvelden
ZEIST
Sportcomplex Schaerweyde
VOLLENHOVE
COMPONISTEN-BUURT
Psych. Ziekenhuis Chr. Sanatorium
STAATSLIEDEN KWARTIER
VERZETSWIJK
INDISCHE BUURT
PATIJN PARK
VALCKEN-BOSCH
LYCEUM-KWARTIER
Prof. Lorentz-Ziekenhuis
DICHTERS-BUURT
CROSE-STEIN
Woudenberg
Zeister Bos
Sportpark Saestum
Zeistergrift
RIJEN-HEIM
KERS-BERGEN
BRUG-AKKER
Gemeentehuis
GRIFFEN-STEYN
HOGE DENNEN
KERCKE-BOSCH
COUWEN-HOVEN
Gem. Sportvelden
Blikkenburgervaart
BUNNIK
Sportcomplex Tolhuislaan
Kromme Rijn
Golfterrein
N229
19 Bunnik
A12
E35
Station Driebergen-Zeist
20 Driebergen
Landgoed Rijnwijck
DRIEBERGEN-RIJSENBURG
N225
Doorn
Amersfoort Doorn
Utrecht
Wijk bij Duurstede
Odijk
0
300
600
900
1200 m
Deze kaart is met de meeste zorg vervaardigd. Er kan echter geen enkele aansprakelijkheid worden aanvaard voor eventuele fouten en/of onvolkomenheden.

Hinweise zur Aufgabe „Glatteis in Zeist“

Themenbereiche: kürzeste Wege auf einem Graphen, relative Häufigkeiten

	Lernvoraussetzungen	**Bemerkungen**
Aufgabe 1	Rechnen mit Maßstäben, Rechnen mit Geschwindigkeiten, Wege und Fahrtzeiten, Einheiten umrechnen, relative Häufigkeiten	Hauptschwierigkeit: geeignetes mathematisches Modell entwickeln
Aufgabe 2	Schätzen und Runden	Hauptschwierigkeit: Mit weiteren freien Parametern muss das erarbeitete Modell verallgemeinert und auf den gegebenen realen Hintergrund zurückbezogen werden.

Kommentar:

In der Aufgabenstellung wird keine (kleinschrittige) Einführung in eine Modellbildung gegeben. Dies ist für die neueren Vorrundenaufgaben der A-lympiade untypisch. In der sehr selbstständigen mathematischen Modellbildung liegt auch der besondere Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.

Die Thematik führt direkt in anspruchvolle Probleme der höheren Mathematik: Kürzeste Wege auf Graphen beschäftigen auch die aktuelle Forschung. Die Aufgabe lässt sich ohne Aufwand zu einer aktuellen und auf die lokalen Gegebenheiten bezogenen Problemstellung umarbeiten, denn Streupläne werden nicht nur in Zeist gebraucht. Eventuell kann sich hieraus das Thema einer Facharbeit entwickeln.

Skizze einer möglichen Lösung

In dieser Skizze werden mögliche Antworten auf die in der Aufgabe gestellten Fragen angesprochen. Von den Schülerinnen und Schülern wird ein Gutachten in angemessener Form erwartet, in das die Überlegungen eingearbeitet sind.

Grundannahmen:

- Ein Streufahrzeug streut immer nur die Straßenseite, auf der es gerade fährt. Um eine Straße vollständig zu streuen, muss das Streufahrzeug diese Straße zweimal abfahren.
- Die Streufahrzeuge sind nicht durch das Glatteis, sondern nur eventuell aufgrund ihrer Beladung in ihrer Geschwindigkeit eingeschränkt.
- Die Streufahrzeuge werden nicht durch Autoverkehr aufgehalten.
- Die Autobahnen werden nicht durch die Gemeinde Zeist gestreut. Bei der A28 ist auch keine zweite Ausfahrt bzw. keine Wendemöglichkeit auf der Karte verzeichnet, so dass hier eine nicht berechenbare Streustrecke entstünde. Die Annahme ist also, dass beide Autobahnen durch einen eigenen Streudienst unverzüglich vom Glatteis befreit werden.

- Die Autobahnen A12 und A28 führen in weit auseinanderliegende Gebiete von Utrecht. Daher werden beide von gleich vielen Pendlern aus allen Regionen Zeists genutzt.

- Für den Durchgangsverkehr durch einen Stadtteil werden nur Hauptstraßen genutzt. Die Straßen in den Wohnbezirken sind aufgrund von Geschwindigkeitsbeschränkungen, Einbahnsystemen, Vorfahrtsregelungen, Ampeln und Fußgängerzonen für die zügige Durchfahrt ungeeignet.

Aufgabe I:

1. Was ist ein effizienter Streuplan?

Kriterium I: Wenn sehr schnell das gesamte Straßennetz gestreut ist, kann eventuell Glatteis vermieden werden. Also ist die **minimale Dauer der Streuarbeiten** das wichtigste Kriterium für einen effizienten Streuplan.

Kriterium II: Weitere Kriterien, falls es tatsächlich schon zur Glatteisbildung kommt: Hohes Verkehrsaufkommen, kurvige oder abschüssige Wegführung und starke Nutzung der von Autos befahrenen Straße durch Fahrradfahrer und Fußgänger, insbesondere durch Kinder. Auf der Grundlage der vorliegenden Daten können viele dieser Faktoren nicht berücksichtigt werden. Wenn man allerdings die Summe aller Zeiten, die irgendwelche fahrenden Autos auf Glatteis verbringen, minimieren kann, dann hat man die Wahrscheinlichkeit von Unfällen durch Glatteis und damit die Gefahr, die vom Glatteis ausgeht, sicherlich effizient eingeschränkt. Also sind bei gleicher Streuzeit **vielbefahrene Straßen zuerst**, kaum befahrene Straßen zuletzt zu streuen (hier sollten Krankenhaus- und Feuerwehrzufahrten gesondert behandelt werden).

Berechnungsformeln für die Effizienz:

a) **Kriterium I:**

Addiere für jeden Streuwagen alle Streuzeiten, Ladezeiten und Anfahrtszeiten auf. So ergibt sich für jeden Wagen eine Arbeitszeit. Das Maximum dieser Arbeitszeiten gibt die Dauer der Streuarbeiten an und damit ein Maß dafür, ob ein Streuplan (im Vergleich zu anderen Streuplänen) effizient ist.

b) **Kriterium II:**

Die Streuzeit für einen Weg w kann leicht berechnet werden: Die einzelnen Streckenabschnitte werden von 1 bis N durchnummeriert. Die Länge des i-ten Abschnitts wird mit l_i und die jeweilige Geschwindigkeit, mit der ein Streuwagen auf diesem Abschnitt streuend fahren kann, wird mit v_i bezeichnet. Der Streuwagen braucht also die Zeit $\frac{l_i}{v_i}$, um den i-ten Abschnitt zu durchqueren. Die gesamte Streuzeit für den Weg beträgt demnach $T = \frac{l_1}{v_1} + \ldots + \frac{l_N}{v_N}$.

Nun muss noch ein Maß für das Verkehrsaufkommen gefunden werden. Das Verkehrsaufkommen auf einer Straße kann anteilig zum Gesamtverkehr angegeben werden. Auf diese Weise kann ein Straßenabschnitt in Zeist mit einer Zahl g_i zwischen

0 und 1 gewichtet werden. Das Maß $f(w)$ für die Effizienz dieses Weges wird nun sinnvollerweise folgendermaßen definiert:

$$f(w) := \frac{g_1 l_1 + \ldots + g_N l_N}{T}$$

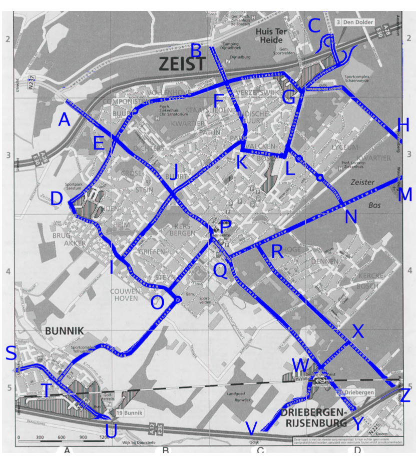
Mit diesem Wert kann die Reihenfolge der Streuabschnitte nach dem zweiten Kriterium gut festgelegt werden, denn er ist hoch, wenn der Weg stark befahren ist bzw. die Gesamtstreuzeit des Weges gering ist.

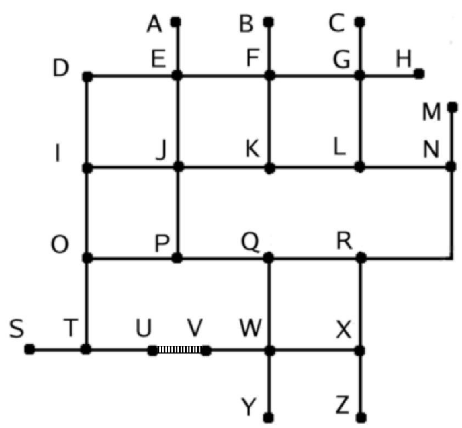
2. Erstellung des Streuplans:

In dieser Lösungsskizze werden nun der Kürze halber nur noch die Hauptstraßen ausführlich behandelt. Der Streuplan für die Nebenstraßen kann in ganz ähnlicher Weise erstellt werden, wobei hier das zweite Kriterium kaum noch ins Gewicht fällt und daher nicht berücksichtigt werden muss.

Aufteilung des Haupstraßennetzes in Teilnetze:

a) **Schematische Darstellung:** Im Hauptstraßennetz werden diejenigen Punkte durch lateinische Großbuchstaben gekennzeichnet, an denen das Wenden der Streufahrzeuge möglich und sinnvoll erscheint. Zur besseren Übersicht wird das Hauptstraßennetz folgendermaßen (nicht maßstabs- bzw. winkelgetreu) wie in der rechten Skizze dargestellt:





Das Salzdepot liegt bei G.

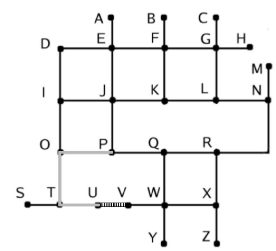
b) **Länge der Teilnetze:** Das Hauptstraßennetz muss in (überschneidungsfreie) Teilnetze unterteilt werden, die jeweils mit einer Streuladung gestreut werden können, also möglichst lang aber dennoch nicht länger als 5 km sind.

c) **Auswahlkriterium:** Zeitverluste entstehen durch Fahrtwege, auf denen nicht gestreut wird. Dies sind die Anfahrtwege zu den Teilnetzen. Um den Streuplan effizient zu halten, müssen also die **Teilnetze so gewählt** sein, **dass die Summe der Anfahrtszeiten minimal ist.**

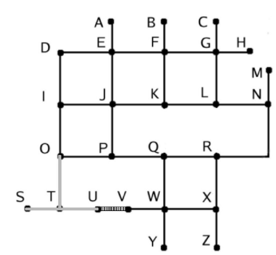
d) **Idee und Beispiel:** Die Teilnetze müssen also so konstruiert werden, dass sie alle möglichst schnell von G aus erreichbar sind. Auf diese Weise werden die Anfahrtszeiten minimiert. Um die folgenden Überlegungen zu vereinfachen, nehmen wir an, alle direkten Verbindungswege zwischen zwei Punkten seien gleich lang und kosteten dieselbe Fahrzeit.

Idee: Man kann sich überlegen und es erscheint auch sehr plausibel, dass eine optimale Aufteilung in Teilnetze $T_1, \ldots, T_m$ vorliegt, wenn jedes der Teilnetze genau 5 km lang ist und und außerdem Teil einer schnellsten Verbindung von G zu demjenigen seiner Punkte ist, der die längste Anfahrtszeit zu G hat.

Eine solche Aufteilung in Teilnetze ist in vielen Fällen – und insbesondere in unserem Beispiel vom Hauptstraßennetz in Zeist – gar nicht möglich. Ziel ist es deshalb, eine Aufteilung in Teilnetze zu finden, die der beschriebenen optimalen Aufteilung möglichst ähnlich ist. Teilnetze der oben beschriebenen Art, die ggf. etwas kürzer als 5 km sind, bezeichnen wir ab jetzt als *optimale Teilnetze*.



Als Beispiel betrachten wir den Punkt U: Von allen markierten Punkten im Hauptstraßennetz hat U die längste Anfahrtszeit zu G, wie man an Hand der Tabelle 1 im Anhang nachprüfen kann. Wir beginnen mit einem optimalen Teilnetz, das U enthält. Wenn wir ein solches auswählen (in der Skizze hell hervorgehoben), ergibt sich schon ein Problem: Für S kann nun kein optimales Teilnetz mehr ausgewählt werden.



Diese Situation tritt bei allen optimalen Teilnetzen von U auf. Da ein zusätzlicher Anfahrtsweg zum Teilnetz ST die Effizienz stark reduzieren würde, wird das optimale Teilnetz von U nun abgeändert: Aus der schnellsten Verbindung von U nach G wird das letzte Stück (im Bsp. OP) entfernt und dafür wird die Strecke ST zum Teilnetz hinzugefügt (siehe Skizze).

e) **Verfahren:**

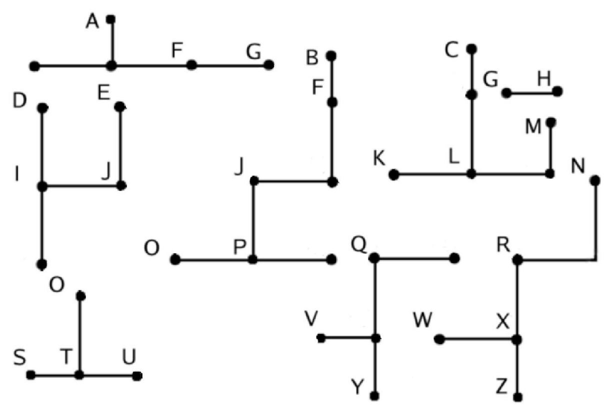
Das erste Teilnetz wurde bereits im Beispiel bestimmt. Das weitere Verfahren verläuft wie folgt:

- Ist ein Teilnetz ausgewählt, so wird es für das weitere Verfahren aus dem Hauptstraßennetz gelöscht. Es verbleiben nur die an das restliche Haupstraßennetz grenzenden Randpunkte im Netz. Aus dem so entstandenen Netz wird das nächste Teilnetz ausgewählt (Verfahren im folgenden Unterpunkt). Wenn das gesamte Hauptstraßennetz gelöscht ist, dann ist eine Unterteilung in Teilnetze, die möglichst schnell von G aus zu erreichen sind, gefunden.
- Wir wählen einen Punkt Π aus, der im verbliebenen Netz eine maximale Anfahrtszeit zu G besitzt. Zu Π wird ein optimales Teilnetz T_Π bestimmt. Wird hierdurch kein weiteres Teilnetz isoliert, dann wird T_Π ausgewählt. Wird ein anderes Teilnetz T_m von G isoliert, dann muss eine bessere Lösung gefunden werden:

– Wenn für ein anderes optimales Teilnetz von Π ein solches Problem nicht auftritt, dann sollte dieses Teilnetz ausgewählt werden.
  Andernfalls
– wird für T_n zunächst nur das Teilstück des Verbindungsweges zu G ausgewählt, das Π mit T_m verbindet. Dann wird das Teilnetz T_m hinzugefügt. Solange die Länge des so konstruierten Teilnetzes kleiner als 5 km ist, können vom schnellsten Verbindungsweg $\overline{\Pi G}$ noch weitere Streckenabschnitte hinzugefügt werden.

Im Allgemeinen kann der Fall auftreten, dass keine der beschriebenen Alternativen möglich ist. Beim Hauptstraßennetzes von Zeist kommt man aber mit dem beschriebenen Verfahren aus. Deshalb werden weitere Fälle hier nicht behandelt.

f) **Ergebnis:** Die für das Verfahren notwendigen Berechnungen werden mit Hilfe der Tabelle 1 im Anhang vorgenommen. Es sind als Resultat unterschiedliche Aufteilungen in Teilnetze möglich. Die Summe der Anfahrtszeiten sind allerdings für all diese unterschiedlichen Aufteilungen gleich. Folgende Aufteilung in Teilnetze wird ausgewählt:



Festlegung einer Reihenfolge für die Teilnetze:

Für die Dauer der Streuarbeiten ist die Reihenfolge, in der die Teilnetze gestreut werden, nicht von Belang. Nach dem zweiten Kriterium ist die Reihenfolge für die Effizienz des Streuplans allerdings wichtig. Um sie festzulegen, muss für jedes Teilnetz TN der Wert $f(TN)$ berechnet werden.

a) **Abschätzung der Verkehrsverteilung:** Der Verkehr führt zum allergrößten Teil von den Wohngebieten zu den Autobahnauffahrten hin bzw. von den Ausfahrten zu den Wohngebieten (Zeist ist eine Pendlerstadt). Wir schätzen für jede Auffahrt den Anteil am Gesamtverkehr auf der Grundlage der zu Beginn genannten Grundannahmen ab:

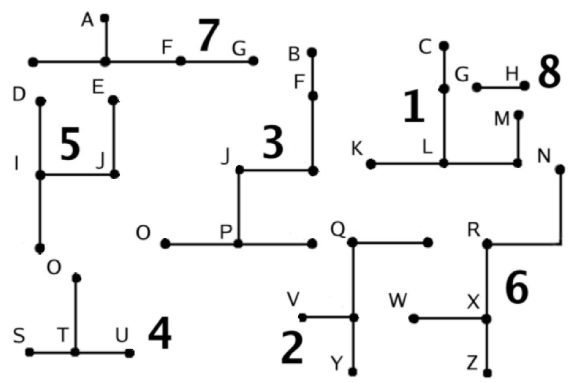
Bezeichung		Auffahrt	Verkehrsanteil
a	:	Den Dolder	0,5
b	:	Driebergen	0,3
c	:	Bunnik	0,2

Für einen Straßenabschnitt l_i wird nun folgendermaßen die Gewichtung g_i (des Verkehrsaufkommens) abgeschätzt:

Für jede Auffahrt wird geschätzt, wieviel Prozent der Autos, welche die gerade betrachtete Auffahrt benutzen, den Streckenabschnitt passieren. Diese Anteile werden mit a_i, b_i und c_i bezeichnet. Das Gewicht g_i wird durch $0,5 \cdot a_i + 0,3 \cdot b_i + 0,2 \cdot c_i$ berechnet. In Tabelle 2 im Anhang ist dies ausgeführt.

b) Nach der in 1.b) aufgestellten Formel werden nun die Effizienzen der Teilnetze bestimmt. Die Berechnungen sind in den Tabellen 3 bis 9 im Anhang ausgeführt.

c) Es ergibt sich der folgende Streuplan für das Hauptstraßennetz:



Sinnvolle Wege durch die Teilnetze sind leicht zu finden. Die Streuwagen übernehmen folgende Teilnetze: Wagen 1 fährt das 1., 3., 5. und 7. Teilnetz ab, Wagen 2 fährt das 2., 4., 6. und 8. Teilnetz ab. Die Anfahrtswege zu den Teilnetzen sind die Folgenden: Für Teilnetz 2: $GLNR$, für Teilnetz 3: GF, für Teilnetz 4: $GLKJPO$, für Teilnetz 5: GFE und für Teilnetz 6: GLN. Die Dauer des Streuvorgangs beträgt nach diesem Plan 132 Minuten, wobei Wagen 1 bereits 12 Minuten früher fertig ist und mit dem Streuen der Nebenstraßen beginnen kann.

Streuplan für die Nebenstraßen:

Ein solcher Streuplan wird hier nicht mehr erstellt, da der Lösungsweg hierzu bereits skizziert wurde. Die Teilnetze werden nach dem oben beschriebenen Verfahren ausgewählt. Hierbei wird man, um den Aufwand in geeignetem Rahmen zu halten, weniger genau arbeiten. Da eine effizienter Streuplan entsteht, wenn sich alle Teilnetze möglichst nahe an G heranziehen, kann man solche Teilnetze nun auch „per Hand“ auswählen. Eventuell wird hierbei die Unterteilung nicht ganz optimal. Auf die Gesamtarbeitszeit wird dies sich aber bei kleinen Ungenauigkeiten nicht wesentlich auswirken. Eine Reihenfolge kann dann willkürlich festgelegt werden, da man davon ausgehen kann, dass das Verkehrsaufkommen auf allen Nebenstraßen in etwa gleich ist.

Aufgabe II:

Der „Knackpunkt“ bei der Erstellung eines Streuplanes ist das Vermeiden langer Anfahrtszeiten, die die Streuwagen zum Depot zu den Teilnetzen zurücklegen müssen. Allein mit Anfahrtswegen verbringen die beiden Streuwagen insgesamt 58 Minuten. Ohne Anfahrtszeiten könnte also die Streuzeit auf den Hauptstraßen um etwa eine halbe Stunde reduziert werden. Sinnvoll wäre ein neuer, zentraler gelegener Standort für das Depot, beispielsweise im Industriegebiet am Dalweg. Ein zusätzlicher Standort weiter im Süden gelegen könnte erheblich zur Reduzierung der Streuzeiten beitragen.

Die gesamte Arbeitszeit betrüge für einen einzelnen Streuwagen 257 Minuten. Mit drei Streuwagen könnte man Arbeitszeit im optimalen Fall auf 86 Minuten reduzieren, und der aktuellen Situation gegenüber 46 Minuten einsparen. Die geschickt gewählte Kombination von einer Erweiterung auf drei Streuwagen und günstig gewählten Standorten, mit denen die Anfahrtszeiten wegfielen, könnte die Dauer des Streuvorgangs auf 47 Minuten reduzieren.

Schwierigkeiten bei der Erstellung des Streuplanes ergeben sich durch die großen Unsicherheiten bei der Schätzung des Verkehrsaufkommens. Hier sollte eine Informationen auf der Grundlage einer Datenerhebung vorliegen. Dabei wird sich auch herausstellen, dass die Gewichte zeitlich nicht konstant gewählt werden können. Somit erweisen sich für unterschiedliche Tageszeiten auch unterschiedliche Streupläne als maximal effizient.

Das Krankenhaus und der Bahnhof werden im vorliegenden Streuplan zufälligerweise bevorzugt behandelt. Man könnte eine solche Bevorzugung durch entsprechende Gewichtung der Straßen garantieren. Auf diese Weise könnten auch andere öffentliche Einrichtungen, wie z.B. die Polizeistation berücksichtigt werden.

Die hier genannnten Aspekte sollten sicherlich viel ausführlicher diskutiert und durch weitere Aspekte ergänzt werden. Dies alles soll in dieser Lösungsskizze aber nicht mehr geschehen.

Anhang:

Tabelle 1:

Die Fahrtzeit ist in Sekunden angegeben und bezieht sich auf die Geschwindigkeit 30 km/h. Für Vergleiche der Anfahrtszeiten ist diese Geschwindigkeit aber nicht von Belang.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A					70																					
B						28																				
C							105																			
D					140				140																	
E	70			140		228				140																
F		28			228		123				123															
G			105			123		211				123														
H							211																			
I				140						140					140											
J					140				140		158					105										
K						123				158		123														
L							123				123			123												
M														105												
N												123	105					158								
O									140							123				299						
P										105					123		53									
Q																53		53					246			
R														158			53							228		
S																				70						
T															299				70		140					
U																				140		193				
V																					193		176			
W																	246					176		70	123	
X																		228					70			105
Y																							123			
Z																								105		

Tabelle 2:

	Streckenabschnitt	Länge /km	Gewichtung bzgl.			Gesamt gewicht
			a	b	c	
A E	Utrechtse Weg 1	0,59	0,00	0,00	0,00	**0,00**
B F	Panweg 1	0,23	0,00	0,00	0,00	**0,00**
C G	Boulevard 1	0,88	1,00	0,00	0,00	**0,50**
D E	Krommerijnlaan	1,17	0,10	0,00	0,00	**0,05**
D I	Weteringlaan 1	1,17	0,00	0,00	0,20	**0,04**
E F	De Dreef	1,9	0,15	0,00	0,00	**0,08**
E J	Utrechtse Weg 2	1,17	0,00	0,10	0,00	**0,03**
F G	Dijnselburger	1,02	0,20	0,00	0,00	**0,10**
F K	Panweg 2	1,02	0,10	0,00	0,00	**0,05**
G H	Woudenbergse Zandweg	1,76	0,00	0,00	0,00	**0,00**
G L	Boulevard 2	1,02	0,80	0,00	0,00	**0,40**
I J	Griftlaan	1,17	0,20	0,20	0,50	**0,26**
I O	Weteringlaan 2	1,17	0,00	0,00	0,80	**0,16**
J K	Schaerweydelaan	1,32	0,50	0,40	0,40	**0,45**
J P	Utrechtse Weg 3	0,88	0,00	0,60	0,10	**0,20**
K L	Dalweg	1,02	0,60	0,20	0,20	**0,40**
L N	Lindenlaan	0,59	0,20	0,40	0,10	**0,24**
L N	Jagersingel	0,44	0,20	0,40	0,10	**0,24**
N M	Woudenbergse Weg	1,05	0,00	0,00	0,00	**0,00**
N R	Laan van Beek en Royen 2	1,32	0,20	0,40	0,10	**0,24**
O P	Waterige Weg	1,02	0,00	0,00	0,20	**0,04**
O T	Koelaan, Sportlaan, Koningin Juliane Laan	2,49	0,00	0,00	1,00	**0,20**
P Q	Dorp Straat	0,44	0,00	0,50	0,00	**0,15**
Q R	Laan van Beek en Royen 1	0,44	0,20	0,40	0,10	**0,24**
Q W	Driebergse Weg	2,05	0,00	0,90	0,00	**0,27**
R X	Arnhemse Bovenweg 1	1,02	0,00	0,10	0,00	**0,03**
R X	Arnhemse Bovenweg 2	0,88	0,00	0,10	0,00	**0,03**
S T	Stationsweg 1	0,70	0,00	0,00	0,00	**0,00**
T U	Stationsweg 2	1,05	0,00	0,00	1,00	**0,20**
U V	A12	3,22	0	0	0	**0,00**
V W	Odijker Weg	1,46	0,00	0,00	0,00	**0,00**
W X	Breullaan	0,59	0,00	0,10	0,00	**0,03**
W Y	Hoofdstraat	1,02	0,00	1,00	0,00	**0,30**
X Z	Arnhemse Bovenweg 3	0,88	0,00	0,00	0,00	**0,00**

Tabelle 3:

Teilnetz 1 f(Teilnetz 1) = 9,02 km/h

Streckenabschnitt	Länge/ km	Gewichtung bzgl.			Gesamt gewicht	gestreut/ km	verstrichene Zeit/s
		a	b	c			
Boulevard 1	0,88	1,00	0,00	0,00	**0,50**	0,88	105
Boulevard 2	1,02	0,80	0,00	0,00	**0,40**	1,90	228
Dalweg	1,02	0,60	0,20	0,20	**0,40**	2,93	351
Lindenlaan	0,59	0,20	0,40	0,10	**0,24**	3,51	421
Jagersingel	0,44	0,20	0,40	0,10	**0,24**	3,95	474
Woudenbergse Weg	1,05	0,00	0,00	0,00	**0,00**	5,00	601

Teilnetz 2 f(Teilnetz 2) = 5,82 km/h

Laan van Beek en Roye	0,44	0,20	0,40	0,10	**0,24**	0,44	53
Driebergse Weg	2,05	0,00	0,90	0,00	**0,27**	2,49	299
Hoofdstraat	1,02	0,00	1,00	0,00	**0,30**	3,51	421
Odijker Weg	1,46	0,00	0,00	0,00	**0,00**	4,98	597

Teilnetz 3 f(Teilnetz 3) = 5,65 km/h

Panweg 1	0,23	0,00	0,00	0,00	**0,00**	0,23	28
Panweg 2	1,02	0,10	0,00	0,00	**0,05**	1,26	151
Schaerweydelaan	1,32	0,50	0,40	0,40	**0,45**	2,58	309
Utrechtse Weg 3	0,88	0,00	0,60	0,10	**0,20**	3,45	414
Dorp Straat	0,44	0,00	0,50	0,00	**0,15**	3,89	467
Waterige Weg	1,02	0,00	0,00	0,20	**0,04**	4,92	590

Teilnetz 4 f(Teilnetz 4) = 5,01 km/h

Stationsweg 2	1,05	0,00	0,00	1,00	**0,20**	1,05	126
Stationsweg 1	0,70	0,00	0,00	0,00	**0,00**	1,76	211
Koelaan, Sportlaan, Koningin Juliane Laan	2,49	0,00	0,00	1,00	**0,20**	4,24	509

Teilnetz 5 f(Teilnetz 5) = 3,68 km/h

Utrechtse Weg 2	1,17	0,00	0,10	0,00	**0,03**	1,17	140
Griftlaan	1,17	0,20	0,20	0,50	**0,26**	2,34	281
Weteringlaan 2	1,17	0,00	0,00	0,80	**0,16**	3,51	421
Weteringlaan 1	1,17	0,00	0,00	0,20	**0,04**	4,68	562

Teilnetz 6 f(Teilnetz 6) = 2,50 km/h

Laan van Beek en Roye	1,32	0,20	0,40	0,10	**0,24**	1,32	158
Arnhemse Bovenweg 1	1,02	0,00	0,10	0,00	**0,03**	2,34	281
Arnhemse Bovenweg 2	0,88	0,00	0,10	0,00	**0,03**	3,22	386
Breullaan	0,59	0,00	0,10	0,00	**0,03**	3,80	457
Arnhemse Bovenweg 3	0,88	0,00	0,00	0,00	**0,00**	4,68	562

Teilnetz 7 f(Teilnetz 7) = 1,95 km/h

Dijnselburger	1,02	0,20	0,00	0,00	**0,10**	1,02	123
De Dreef	1,9	0,15	0,00	0,00	**0,08**	2,93	351
Krommerijnlaan	1,17	0,10	0,00	0,00	**0,05**	4,10	492
Utrechtse Weg 1	0,59	0,00	0,00	0,00	**0,00**	4,68	562

5.2 Wiskunde-B-Tag

Der „wiskunde B-Tag“ ist die Wiskunde B-Variante der A-lympiade (vgl. dort). Es ist ein Wettbewerb für Schülerinnen und Schüler der Klassen 5 HAVO und 5/6 VWO, bei dem Fertigkeiten wie Problemlösen, kritische Betrachtung von Modellen, Mathematisierung, logisches Argumentieren, und Zusammenarbeit im Team im Mittelpunkt stehen. Es geht alsoum dieselben Prozessfertigkeiten wie bei der A-lympiade, aber der Wiskunde B-Tag richtet sich an SchülerInnen mit Wiskunde B in ihrem Profil. Der Auftrag, an dem die Schüler arbeiten ist technisch-exakt orientiert und schließt damit an an das N-Profil.Es liegt also, im Vergleich mit der Wiskunde A-lympiade mehr Nachdruck auf der abstrakten Mathematik.

Die vom Freudenthal-Institut erarbeitete Aufgabe wird an Schulen auch als Facharbeitsauftrag verwendet, Teilnahme am Wettbewerb ist nicht verpflichtend. Der Wettbewerb findet jährlich statt und dauert einen Tag Am Tag des Wettbewerbs wird an der eigenen Schule von Teams, die aus drei oder vier SchülerInnen bestehen, an dem Auftrag gearbeitet. Zeit haben die SchülerInnen von 9:00 Uhr bis 16:00 Uhr.

Wiskunde B-dag 2002

Einleitung

Schnelles Potenzieren

1+1 = 2

und wie weiter ?

Stell dir vor, du müsstest die Potenz 7^{25} ausrechnen. Du weißt, dass Potenzieren mehrmaliges Multiplizieren bedeutet. Also kann man folgendermaßen vorgehen.

$$
\begin{aligned}
&7^2 = 7 \cdot 7 = 49\\
&7^3 = 49 \cdot 7 = 343\\
&7^4 = 343 \cdot 7 = 2401\\
&7^5 = 2401 \cdot 7 = 16807\\
&7^6 = 16807 \cdot 7 = 117649\\
&7^7 = 117649 \cdot 7 = 823543\\
&7^8 = 823543 \cdot 7 = 5764801\\
&7^9 = 5764801 \cdot 7 = 40353607\\
&7^{10} = 40353607 \cdot 7 = 282475249\\
&7^{11} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Mit etwas Geduld und Sorgfalt kommt man ans Ziel, allerdings benötigt man 24 Multiplikationsschritte! Durch clevere Verwendung aller ermittelten Zwischenresultate geht es auch kürzer. Man beginnt mit $7^1 \cdot 7^1$; das Ergebnis ist 7^2. Danach berechnet man $7^2 \cdot 7^1$

mit dem Ergebnis 7^3. Dann berechnet man $7^3 \cdot 7^3 = 7^6$. Der nächste Schritt ist $7^6 \cdot 7^3 = 7^9$, dann $7^9 \cdot 7^9 = 7^{18}$. Es folgt $7^{18} \cdot 7^6 = 7^{24}$ und schließlich erreicht man 7^{25}, indem man $7^{24} \cdot 7^1$ berechnet.

Bei jedem Schritt werden nur schon vorher berechnete Ergebnisse verwendet. Bei dieser Form des Potenzierens achtet man allein auf die Exponenten und von daher multipliziert man eigentlich nicht, sondern man addiert. So kann man die 25ste Potenz einer beliebigen Zahl mit der folgenden Abfolge von 7 Additionen von Exponenten erreichen:

$1 + 1 = 2$; $2 + 1 = 3$; $3 + 3 = 6$; $6 + 3 = 9$; $9 + 9 = 18$; $18 + 6 = 24$; $24 + 1 = 25$

Eine derartige Abfolge von Additionen kann kürzer in einer sogenannten **Additionskette** notiert werden: 1,2,3,6,9,18,24,25

In der Aufgabe dieses Wiskunde B-Tages geht es darum, wie man eine kurze Additionskette dieser Art findet. Die Herkunft des Problems ist eigentlich schon dargestellt. Es geht um die schnelle Berechnung von hohen Potenzen dadurch, dass man auf eine geschickte Art und Weise Produkte kombiniert. Das Problem spielt eine Rolle auf dem Gebiet der Informatik, bei Theorien, die den Hintergrund für die Arbeit mit Computern bilden. Oft geht es dabei darum, wie viele einfache Rechenschritte auszuführen sind, um ein bestimmtes Problem zu lösen Das zugehörige Gebiet der Mathematik trägt den Namen *Komplexitätstheorie*, zur Zeit ein heiß diskutiertes Thema im Anwendungsbereich der Mathematik, ein spannendes Gebiet, in das du heute deine ersten Schritte setzt.

Die Aufgabe

Bei der Aufgabe des Wiskunde B-Tages gehst du auf die Suche nach möglichst kurzen Additionsketten für natürliche Zahlen. Eine kurze Additionskette für die Zahl 25 ist zum Beispiel 1, 2, 3, 6, 9 , 18, 24, 25 (siehe Einleitung). Aber, was man nicht sofort sieht, ist, ob diese Additionskette die kürzest mögliche ist. Vielleicht geht es durch eine geschicktere Verwendung von zuvor behandelten Zahlen noch kürzer! Sehr viele Menschen haben in diesem Gebiet schon Untersuchungen angestellt. Manchmal mit viel, manchmal mit weniger Erfolg. Du erhältst bei deiner Untersuchung unter anderem dadurch Hilfe, dass dir einige Ergebnisse vorhergehender Untersuchungen angeboten werden. Aber das Problem ist noch immer nicht zufriedenstellend gelöst . . . Möglicherweise kannst du heute einen Beitrag zu einer weitergehenden Lösung des Problems einbringen.

Die Aufgabe ist in fünf Teile aufgeteilt: Im Teil A wirst du selbst Additionsketten für kleine Zahlen aufstellen. Im Teil B wird eine erste Schätzung für die Länge von Additionsketten untersucht. Danach wirst du dich bei den Teilen C und D in schon bekannte Methoden vertiefen, ziemlich kurze Additionsketten aufzustellen. Im Teil E wirst du versuchen, selbst eine Methode zu entwickeln, die Aussagen darüber ermöglicht, wann eine bestimmte Methode wirklich kurze oder sogar garantiert kürzeste Additionsketten liefert. Dir werden dort auch Fragen allgemeiner Art gestellt. Dabei wirst du dann sicherlich Zusammenhänge entdecken.

> **Die visuell klare Präsentation von Zusammenhängen, die du gefunden hast, ist wertvoll und liefert bei dieser Aufgabe mit Sicherheit Pluspunkte für die Beurteilung.**

Bei der Arbeit in einem derartigen noch nicht erschlossenen Gebiet ist nicht nur die Lösung eines dir vorgelegten Problems wichtig, sondern auch das Stellen neuer relevanter Fragen, die eine weitere Untersuchung verdienen.

Wenn es dir gelingt, ein gutdefiniertes ungelöstes Problem in diesem Gebiet zu benennen, bringt dir das Bonuspunkte ein!

Diese Aufgabe ist in besonderer Weiset für Teamarbeit geeignet:

- **man muss ziemlich viele Arbeiten erledigen, die leicht aufzuteilen sind,**
- **man kann dabei sehr leicht etwas übersehen, sodass eine „zweite Einschätzung“ wirklich notwendig ist**
- **man muss subtil argumentieren können und das gelingt am besten, indem man einander die Argumente vorträgt und kritisch die Argumentationen der Teamgefährten verfolgt,**
- **das Endprodukt lässt sich gut aus separaten Illustrationen und Beweisen und Texten zusammenfügen, die zuvor einzeln bzw. in Kleingruppen vorbereitet wurden. Bei guter Teamarbeit entsteht ein gutes Gesamtwerk.**

Natürlich ist die Verwendung eines Rechners empfehlenswert und erlaubt. Eigene Computerprogramme dürfen auch verwendet werden.

Vielleicht denkst du: ich schreibe selbst ein einfaches Computerprogramm, das für jede gegebene Zahl n automatisch eine kürzeste Kette findet. Gute Idee, aber sei nicht übermütig. Das wurde nämlich schon oft versucht, ist aber noch nie zufriedenstellend gelungen. Nicht gelungen in dem Sinne, dass ein derartiges Programm auf den schnellsten Computern der Welt nicht innerhalb eines Tages mit Sicherheit die kürzesten Ketten für die Zahlen 1 bis 50 berechnen konnte.

Endprodukt: Bericht einer Entdeckungsreise

Das Endprodukt dieses Auftrages ist eine für einen Außenstehenden gut leserliche Beschreibung der Untersuchungen und deren Ergebnisse.

Schreibe das Endprodukt in der Form eines interessanten Berichts über deine Untersuchungsarbeit, unter Angabe der gefundenen Resultate und der in euren Augen wichtigen, aber noch nicht gelösten Probleme.

Nach dem Studium dieses Berichts muss ein interessierter Leser, der die einzelnen Teilaufgaben A bis E nicht gesehen hat, in der Lage sein zu begreifen, wie man schnell Zahlen mit Hilfe von Additionsketten erreichen kann. Teile den Bericht nach eigenen Kriterien ein; dabei braucht man sich nicht an die Reihenfolge der Aufgaben der Teile A bis E halten. Alle Strategien müssen deutlich beschrieben werden und mit mathematischen Argumenten unterfüttert werden. Die mathematischen Argumentationen können auch in separaten Beilagen beschrieben werden, da dadurch der Bericht lesbarer ist. Man sollte auch daran denken zu beschreiben, an welchen Stellen selbst gefundene Methoden vielleicht verbessert werden könnten. Erkläre, warum deiner Meinung nach deine Ideen zur Verbesserungen führen können. Es geht dabei um Fragen, auf die man bei den Untersuchungen gestoßen ist, die eine nähere Untersuchung verdienen, auf die man aber selbst keine Antwort gefunden hat. Man sollte die gefundene Methode auch an der Hand von Zahlenbeispielen erläutern. Der Bericht sollte sicherlich auch Spannung und Überraschungen für den Leser beinhalten.

Kurz:

Beschreibe in der Art eines selbstständig lesbaren Berichtes die Untersuchungen und die endgültige Verfahrensweise derart, dass:

- **es dem Leser deutlich ist, welches Problem angegangen wird,**
- **der Leser davon überzeugt wird, dass die Vorgehensweise gut funktioniert, aber dass es auch ungelöste Probleme gibt, die eine weitere Untersuchung verdienen,**
- **die Teilaufgaben A bis E im Bericht verarbeitet sind.**

Man darf davon ausgehen, dass der Leser über ausreichende mathematische Kenntnisse verfügt, um den mathematischen Inhalt in den Anlagen zu verstehen.

Wichtig:

Der Bericht muss **gedruckt** werden oder mit einem **schwarzen Stift** geschrieben werden, damit er gut kopiert werden kann. Wenn man in den Bericht Abbildungen aufnimmt, müssen auch diese gedruckt werden oder mit einem schwarzen Stift angefertigt sein.

Zum Schluss:

Denke daran, dass das Anfertigen des Berichtes viel Zeit erfordert. Es erscheint sinnvoll, um dafür ungefähr zwei Stunden zu reservieren. Beginne also gegen 14:00 Uhr mit dem Bericht.

Teil A: Additionsketten

Bei dem Aufstellen von Additionsketten für natürliche Zahlen muss man sich an die folgenden Spielregeln halten:

- **Man beginnt immer mit der Zahl 1.**
- **Jede folgende Zahl wird durch die Verwendung von Zahlen erzielt, die schon vorher gefunden wurden, die sogenannten** *vorhergehenden Zahlen*. **Dies ist auf zwei Arten möglich:**
  - **durch die Addition von zwei vorhergehenden Zahlen**
  - **durch die Verdopplung einer vorhergehenden Zahl (also durch die Addition einer Zahl zu sich selbst)**

Eine sichere, aber auch träge Art und Weise um 25 zu erreichen erfordert 24 Additionsschritte. Aber in der Einleitung sahen wir, dass es auch viel schneller gehen kann:

$1 + 1 = 2$; $2 + 1 = 3$; $3 + 3 = 6$; $6 + 3 = 9$; $9 + 9 = 18$; $18 + 6 = 24$ und $24 + 1 = 25$

Hierfür sind 7 Additionsschritte nötig und dies ist ein beachtlicher Fortschritt im Vergleich zur ersten Methode. Die Frage ist nun: *Kann man 25 noch schneller erreichen als mit 7 Additionsschritten?*

Bei 25 kann man das noch herausfinden, indem man alle Möglichkeiten systematisch durchgeht, aber bei größeren Zahlen kann das schnell enorm schwierig werden. Jetzt wird zunächst einmal genau beschrieben, was wir unter einer Additionskette verstehen.

Definition: ADDITIONSKETTE

Eine *Additionskette* für eine natürliche (d.h. positive ganze) Zahl n ist eine steigende Folge natürlicher Zahlen,

- **die mit der 1 beginnt,**
- **die mit n endet,**
- **in der jede Zahl nach der Anfangszahl 1 die Summer zweier vorhergehender Zahlen ist, oder das Doppelte einer vorhergehenden Zahl.**

Zur ersten oben genannten Vorgehensweise zur Erreichung der Zahl 25 gehört die Additionskette:

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25

Zur zweiten Vorgehensweise gehört die Additionskette:

1,2,3,6,9,18,24,25

Du sollst nun das Herstellen von Additionsketten üben. Dadurch erhätst du einen besseren Zugriff auf verschiedene Verfahrensweisen, eine Zahl zu erreichen. Dazu stellst du nun zuerst eine Anzahl Additionsketten auf.

> 1 Suche für die Zahlen n = 1 bis n = 32 die kürzesten Additionsketten und gib die Ergebnisse in Form einer Tabelle an.

Nimm dir genügend Zeit, so dass du sicher weißt, dass du bei jeder Zahl von 1 bis 32 die kürzest mögliche Kette gefunden hast. Als Anhaltspunkt sei gesagt: 15 kann mit 5 Additionsschritten und 23 mit 6 Additionsschritten erreicht werden.

Die kleinst mögliche Anzahl an Additionsschritten, die man nötig hat, um eine natürliche Zahl zu erzielen, ist eine Charaktereigenschaft dieser Zahl. Deshalb definieren wir auch wie folgt:

Definition KOMPLEXITÄT

Die **Komplexität** einer natürlichen Zahl n ist die Anzahl Additionsschritte, die für die kürzest mögliche Additionskette für diese Zahl n benötigt werden.

Wir geben die *Komplexität* einer Zahl n mit $c(n)$ an.

Die Komplexität einer Zahl kann man also an der kürzesten Additionskette erkennen, indem man die Anzahl der Zahlen in der Kette nach der Startzahl 1 zählt. Für n = 10 kann man mehrere kürzeste Additionsketten finden, zum Beispiel:

1,2,3,5,10 und 1,2,4,8,10

In beiden Fällen hat man eine Additionskette mit 5 Zahlen, wobei also 4 Additionsschritte gemacht worden sind. Da man auch nachweisen kann, dass keine kürzeren Additionsketten für die Zahl 10 möglich sind, gilt also: c (10) = 4.

> **2** **Ergänze die Tabelle für die Frage 1 mit den Werten für $c(n)$. In der unteren Tabelle ist schon ein Anfang gemacht.**

n	Eine kürzeste Additionskette	c(n)
1	**1**	**0**
2	**1, 2**	**1**
3	**1, 2, 3**	**2**
4	**1, 2, 4**	**2**
5	**1, 2, 3, 5**	**3**
6	**1, 2, 3, 6**	**3**
7	**1, 2, 3, 4, 7**	**4**
8	**1, 2, 4, 8**	**3**
9	**1, 2, 3, 6, 9**	**4**
10	**1, 2, 3, 5, 10**	**4**
...	...	...

Teil B: Eine erste Vermutung für c(n)

Für das Erreichen einer Zahl n benötigt man höchstens n-1 Additionsschritte. Diese Anzahl an Schritten ist genau notwendig, wenn man immer 1 zu der zuletzt gefundenen Zahl addiert. Meistens ist dies aber bei weitem nicht die schnellste Methode, um n zu erreichen.

Aber man weiß jetzt jedenfalls, dass für jede Zahl n gilt: $\mathbf{c(n) \leq n - 1}$

In der Tabelle zu Frage 1 erkennt man, dass n-1 eine sehr grober Schätzwert für die obere Grenze ist. Im Allgemeinen gelingt es mit viel weniger Additionsschritten. Ein wichtiger Teil der Entdeckungsreise an diesem Wiskunde B-Tag zielt auf das Entdecken einer oberen Grenze für c(n), die möglichst nahe an dem wirklichen Wert von c(n) liegt.

Eine solche obere Grenze werden wir eine scharfe obere Grenze nennen. Ein erster Versuch, die obere Grenze genauer zu erfassen, folgt nun.

> **3** **Kontrolliere mit deiner Tabelle, ob die folgende Aussage für die Zahlen 1 bis 32 gültig ist:**

$$\mathbf{c(n) \leq \frac{n+1}{2}}$$

Wenn diese Aussage über c(n) für jede natürliche Zahl n gültig ist, dann hat man auf einmal eine viel bessere obere Grenze für c(n) gefunden! Die Aussage besagt im Grunde genommen, dass man nicht einfach immer 1 zu einer vorhergehenden Zahl addiert bis man n erreicht hat, sondern dass man unterwegs eine geschickte Beschleunigung einbaut. Tatsächlich besagt die Aussage, dass es immer möglich ist, eine Additionskette mit höchstens Schritten zu machen.

> 4 Führe die Argumentation für die Richtigkeit der obigen Behauptung für jede Zahl n.

Dies ist ein wichtiger Augenblick!

Man hat jetzt durch eine Beweisführung die grobe obere Grenze für c(n) schon ein wenig verfeinert, mit Sicherheit für größere Werte von n, worum es ja schließlich geht: Eine Obergrenze nennen wir besser oder genauer als eine andere, wenn sie für alle Werte von n (mit Ausnahme einiger Werte zu Beginn) besser ist. So ist $\frac{n}{3}+3$ genauer als $\frac{n+1}{2}$, weil dabei für große n ein erheblicher Gewinn zu verzeichnen ist, wobei wir die Werte für n bis zur Zahl 15 vernachlässigen. Wir kommen darauf später noch zurück.

Teil C: Die Verdopplungsmethode

Einige Zahlen kann man erreichen, indem man immer nur verdoppelt. In der Tabelle zu Frage 1 sieht man, dass dabei ein Zusammenhamg mit den Potenzen von 2 besteht.

> 5 Setze voraus, dass n eine Potenz von 2 ist, angenommen also: n = 2^k. Was ist dann c(n)?

> 6 Was ist die größte Zahl n, die die Komplexität 10 hat, das heißt: welches ist die größte Zahl n mit c(n) = 10? Und welche Zahl n ist die größte mit c(n) = q, für eine beliebige natürliche Zahl q? Schreibe eine schlüssige Argumentation für diese Frage.

Die Potenzen von 2 sind besondere Zahlen. Die Zahl 39 kann man zum Beispiel nicht erreichen, indem man nur verdoppelt. Man kommt zur 32 über 1, 2, 4, 8,1 6, 32. Danach kann man, indem man schon früher berechnete Potenzen von 2 verwendet, dennoch die Zahl 39 erreichen.

1,2,4,8,16,32, 36 (=32+4), 38 (=36+2),39 (=38+1)

Diese Vorgehensweise, bei der man zunächst nur so weit wie möglich verdoppelt, um danach mit zuvor berechneten Potenzen von 2 zu ergänzen, nennen wir die **Verdopplungsmethode**.

> 7 Verwende die Verdopplungsmethode, um eine Additionskette für die Zahl 1308 zu erstellen.

> 8 Begründe, dass man mit der Verdopplungsmethode jede Zahl n erreichen kann.

Die Verdopplungsmetode kann also für jede Zahl n eingesetzt werden. Aber man sollte nicht glauben, dass dies immer die schnellste Methode ist. Dies kann man schon in der Tabelle von Teil A erkennen.

Teil D: Die Faktormethode

Die Zahl 15 kann man auf verschiedenen Wegen erreichen. Die Verdopplungsmethode aus Teil B führt zur folgenden Additionskette:

1,2,4,8,12,14,15

Es geht aber kürzer mit:

1,2,4,5,10,15

und auch mit:

1,2,3,6,12,15

Bei der zweiten Kette wird die 15 durch geschickte Verwendung der Zahl 5 erreicht, in der dritten Kette durch geschickte Verwendung der Zahl 3. Es ist kein Zufall, dass 3 und 5 als Faktoren in 15 vorkommen. Die Methode, die bei dem Aufstellen einer Additionskette die Faktoren verwendet, die in der Zahl vorkommen, nennen wir Faktormethode.

> 9 Verwende die Faktormethode für n = 85 und für n = 1122.

Die Frage stellt sich nun, ob die Faktormethode schnellere Ergenisse bringt als die Verdopplungsmethode. Dies ist sicherlich nicht immer der Fall, aber in manchen Fällen wohl.

> 10 Untersuche die Zahlen 63 und 1023. Suche eine kürzere Additionskette als die Kette, die man mit der Verdopplungsmethode bekommt. Vergleiche die Schrittzahl, die du dabei benötigst, mit der Anzahl der Schritte bei der Verdopplungsmethode.

> 11 Suche ein Beispiel, bei dem die Faktormethode eine Additionskette ergibt, die 8 Schritte kürzer ist als die Kette, die sich bei Verdopplungsmethode ergibt.

Teil E: Eigenständige Untersuchung

Im Teil A hast du eine Tabelle für die kürzesten Additionsketten der Zahlen von 1 bis 30 angelegt. In den Teilen C und D wurden spezielle Vorgehensweisen betrachtet, um Additionsketten aufzustellen: die Verdopplungsmethode und die Faktormethode.

Es wird jetzt Zeit, eigenständig weitere Untersuchungen anzustellen. Natürlich kann man dabei die zwei Vorgehensweisen verwenden, die betrachtet wurden (oder Varianten davon) und man kann die Tabelle aus Teil A auf Besonderheiten untersuchen. Mögliche Richtfragen bei der weiteren Untersuchung sind: Wenn ich $c(n)$ kenne, gilt dann immer $c(2n) = c(n) + 1$? Wann wohl und wann nicht? Wenn $n = a \cdot b$ ist, gilt dann: $c(n) = c(a) + c(b)$? Wann gilt dies und wann nicht? Diese Fragen brauchst du nicht anzugehen (sie sind sicherlich nicht einfach zu beantworten!), aber geben wohl an, welche Art von Fragen man selbst stellen könnte, zum Beispiel an Hand der Ergebnisse, die man selbst schon in der Tabelle von Teil A festgelegt hat.

Ein wichtiger Unterpunkt der Untersuchung ist auf die nähere Bestimmung der Obergrenze und der Untergrenze für $c(n)$ gerichtet. Eine erste bessere Annäherung der Obergrenze wurde in Teil B schon gefunden. Für die untere Grenze haben wir bis jetzt nur die sehr schwache Aussage, dass man für alle Zahlen $n > 1$ mindestens einen Additionsschritt nötig hat. Aus der Verdopplungsmethode lässt sich eine bessere Bestimmung beider Grenzen ableiten. Bedenke dabei, wie man eine Zahl n mit der Verdopplungsmethode erreicht. Auch die Faktormethode kann möglicherweise zur näheren Bestimmung der Grenzen beitragen, zwischen denen $c(n)$ mit Sicherheit liegen muss.

> **12** **Versuche nun eine Vorgehensweise zu formulieren, die dich befähigt bei einer gegebenen Zahl n eine kurze Additionskette aufzustellen. Wie genau kann man c(n) dabei abschätzen?**

Um das Vorgehen zu überprüfen, darfst du dein Wissen auf einen Spezialfall anwenden.

> **13** **Finde eine möglichst kurze Kette für die Zahl 8127. Erkläre anhand deiner Vorgehensweise wie du zu deiner Antwort kommst und warum du glaubst, dass dein Ergebnis nicht verbessert werden kann.**

Zum Schluss

Verarbeite die Ergebnisse deiner Untersuchungen zu einem Endprodukt wie es auf Seite 3 beschrieben ist.

Viel Erfolg bei der Ausarbeitung deines Auftrages.

Kapitel 6

Hintergrund

6.1 Schulsystem in den Niederlanden

Das niederländische Schulsystem ist im Vergleich zum nordrhein-westfälischen vielschichtiger, es enthält mehr Gestaltungsfreiheiten für die Beteiligten. Die Selbständigkeit der einzelnen Schulen, was z. B. die Finanzen, die Personalsituation oder auch die Gestaltung des Schullebens betrifft, ist groß.

Der Beginn der Grundschulzeit ist nicht an den Schuljahrsbeginn gebunden, die Schulpflicht beginnt für jedes Kind individuell mit dem Monat nach seinem fünften Geburtstag. So wachsen die niederländischen Kinder sanfter in ihre Schulzeit hinein, viele gehen schon mit vier Jahren probeweise (d.h. zwei oder drei Tage die Woche oder zunächst nur vormittags) in die Schule. Solange es die beruflichen und häuslichen Bedingungen der Eltern erlauben, können die Kinder auch den Ganztagsbetrieb aller Schulen schrittweise zu lernen.

Die Schulpflicht dauert 12 Schuljahre, d.h. mindestens bis zum 16. Lebensjahr. In der Regelschule gibt es ein großes Angebot von sonderpädagogischen Förderklassen, d.h. integrativen Unterricht für behinderte und nicht behinderte Kinder gemeinsam. Darüber hinaus haben die Niederlande viele auf spezielle Behinderungen ausgerichtete Förderschulen.

Den Abschluss der Basisschool, die maximal acht Jahre dauert, bildet in der Regel eine zentrale Lernstandsdiagnose. Die Aufgaben hierfür werden wie alle landesweiten Prüfungsaufgaben vom CITO, dem zentralen Test-Institut, entwickelt. Sie prüfen die gesetzlich festgelegten Lernziele der Grundschule ab. Das Ergebnis dieser Untersuchung, dazu schriftliche Gutachten der Basisschool-Lehrer und eventuelle Tests und Gespräche mit Kollegen der aufnehmenden Schule entscheiden über den Übergang der Kinder zur weiterführenden Schule. Dieser erfolgt in der Regel im 12. Lebensjahr.

Die Sekundarstufe I beginnt mit der „Brückenklasse“ (brugklas oder klas 1) und wird an vielen Schulen noch in der Gesamtheit des Jahrgangs absolviert. Zur 2. oder 3. Klasse (dt. 7. oder 8. Schuljahr) gehen die niederländischen SchülerInnen dann in die drei verschiedenen Schulzweige **vmbo**, **havo** und **vwo**. (siehe Grafik). Meist befinden sie sich jedoch weiterhin unter einem Dach, sowohl räumlich, als auch, was die Schulleitung betrifft. Daher wird die niederländische Sekundarstufe I oft als additive Gesamtschule bezeichnet.

Die Mittelstufe („erste Phase“) umfasst drei Jahre, darauf baut die Oberstufe („zweite Phase“) dann mit zwei bzw. drei Jahren auf. Die beiden möglichen Abschlüsse nach 11 bzw. 12 Schuljahren sind in etwa der Fachhochschulreife und dem Abitur vergleichbar. Die „havo“ (der höhere allgemeinbildende fortgeführte Unterricht) hat eine zweijährige Oberstufe und bietet nach bestandener Abschlussprüfung Zugang zu einem breitgefächerten Angebot an höheren Berufsausbildungsgängen und zu verschiedensten Fachhochschulen. Die SchülerInnen im vwo-Zweig durchlaufen den vorbereitend-wissenschaftlichen Unterricht, der ihnen nach drei Jahren die Befähigung zu einem Studium an der Universität bescheinigt. Innerhalb der gesamten Sekundar-Schulzeit ist ein Wechsel zwischen den Zweigen möglich, wird jedoch vor allem in Richtung des niedrigeren Abschlusses genutzt.

Beim Eintritt in die Oberstufe wählen die SchülerInnen nach Neigungen und Begabungen oder auch nach Wünschen für spätere Berufsfelder eines von vier Profilen. Diese sind „Kultur und Gesellschaft“ (cultuur en maatschappij CM), „Wirtschaft und Gesellschaft“ (economie en maatschappij EM), „Natur und Gesundheit“ (NG) und „Natur und Technik“ (NT). In jedem Profil sind verpflichtende Fächerkombinationen von drei bis vier Fächern und die Stundentafel vorgegeben, es gibt entsprechend unterschiedliche Wahlfreiheiten und Ergänzungsmöglichkeiten. Zum Profil „Natur und Gesundheit“ gehören beispielsweise Mathematik, Physik, Chemie und Biologie als Pflichtfächer.

Allen Fächern sind sogenannte „studie last uren (slu)“ zugeordnet. Diese in Stunden angegebene Arbeitszeit für das jeweilige Fach umfasst alles, was von den Schülern für den Unterricht, die Hausaufgaben, praktische Arbeiten und die Vorbereitung auf Prüfungen durchschnittlich aufgewendet werden muss. So enthält die Ausbildung eines Schülers im havo-Zweig z.B. 280 studie last uren Mathematik im Profil „Wirtschaft und Gesellschaft“. In den „Gesellschafts“-Profilen wird Wiskunde A unterrichtet. Die „Natur“-Profile haben Wiskunde B im Fächerkanon.

Bei der Neuordnung der Oberstufe war seit Mitte der achtziger Jahre die Stärkung der Selbstständigkeit der Schülerinnen und Schüler in ihrem Lernprozess ein zentraler Gedanke. Es wurden die sogenannten „praktischen Aufträge“ eingeführt, die in vielerlei Hinsicht Entsprechungen in den Facharbeiten in Deutschland finden. Diese schriftlichen Ausarbeitungen werden in den Niederlanden allerdings schon in der Mittelstufe vorbereitet und sind in mehreren Fächern anzufertigen. Eine weitere zentrale Idee, die den Unterricht verändern sollte, wurde der Begriff des „studiehuis“ (etwa mit Studierhaus oder Studienraum zu übersetzen). Nach diesem didaktischen Grundkonzept soll der Lernende mit steigendem Alter immer mehr in der Lage sein, eine aktive Rolle bei der Gestaltung seines Lernprozesses zu übernehmen und Lernfortschritte in Eigenverantwortung zu gestalten. Damit verändern sich auch die Aufgaben der Lehrer, die vom Dozenten zum mehr begleitenden Moderator werden. Phasen von klassischer Instruktion durch den Lehrer treten damit zurück, es wird selbsttätigen Erarbeitungsphasen mehr Raum gegeben. Hierfür steht den Schulen inzwischen geeignetes Material zur Verfügung. Die Arbeit im „studiehuis“ kann in Klassenräumen, in der Mediothek oder am Computer geleistet werden. Außerdem gibt es dafür ausgewiesene Unterrichtsstunden, in denen alle Schülerinnen und Schülersich mit den ihnen gestellten Aufgaben auseinandersetzen, wobei die Lehrerinnen und Lehrerals Berater anwesend ist. Allerdings sind die mit dem studiehuis angestrebten Ziele noch nicht vollständig umgesetzt. Auch wurden durchaus Kritikpunkte geäußert, wie z. B., dass die studienhuis-Arbeit die Schüler stark belastet und die erwartete Selbständigkeit im Lernprozess noch nicht erreicht ist.

Beide Oberstufen-Lehrgänge schließen mit staatlichen Prüfungen ab, die aus verschiedenen Teil-Prüfungen bestehen. So sind die Schul-Examina von den einzelnen Kolleginnen und Kollegen und der Schule zu verantworten. Den zweiten, größeren Teil der Abschlussprüfungen bilden die landesweit zentral gestellte Aufgaben. Außerdem haben die SchülerInnen weitere Leistungen zu erbringen: eine zum Profil passende Facharbeit und einen praktischen Handlungsteil. Dabei geht es um die Durchführung von Aufträgen, bei denen die SchülerInnen sich an Anschlussausbildungen und Berufsperspektiven orientieren. Die landesweit gestellten Prüfungsaufgaben der schriftlichen Abschlussprüfungen werden ebenfalls vom Test-Institut CITO entworfen, einige davon stellen wir in dieser Publikation vor.

Verfolgt man die Diskussion in Presse, Funk und Fernsehen, dann wird deutlich, dass auch in den Niederlanden die Schule und der Unterricht ein ständiges Thema konstruktiver öffentlicher Diskussion sind. Die Aufgabenstellungen und auch der Ausfall der Ergebnisse werden jedes Jahr aufs Neue in allen gesellschaftlichen Gruppierungen ausführlich besprochen.

Im Nachbarland sind in den letzten 15 Jahren so grundlegende Reformen insbesondere der Aufgabenkultur erreicht worden, dass uns dies einen Blick über den Tellerrand wirklich lohnenswert erscheinen lässt.

Skizze zum Aufbau des Schulsystems:

		vmbo[1]	havo[2]	vwo[3]
Klassenstufe in				
NL	D			
6	12			vwo (4Profile)
5	11		havo (4 Profile)	vwo (4Profile)
4	10	vmbo	havo (4 Profile)	vwo (4Profile)
3	9	vmbo	havo	vwo
2	8	vmbo	havo	vwo
1	7	B r ü c k e n k l a s s e		
Grundschule etwa 4. bis 12. Lebensjahr				

[1]vmbo:voorbereidend middelbaar beroepsonderwijs (in etwa: mittlerer, auf eine anschließende Berufsausbildung vorbereitender Unterricht

[2]havo: hoger algemeen voortgezet onderwijs

[3]vwo: voorbereidend wetenschappelijk onderwijs

6.2 Das niederländische Examensprogramma

Die Leistungen von Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht hängen nicht nur von der Qualität der Aufgaben, den gewählten Unterrichtsmethoden und „schönen“ Kontexten ab. Sie werden auch stark beeinflusst von Rahmenbedingungen, die durch die Gesellschaft, die Politik, die Schuldidaktik usw. vorgegeben werden.

Im niederländischen Bildungswesen wird nach folgenden Leitlinien verfahren:

a) Es werden für den Unterricht klar definierte, überprüfbare Ziele vorgegeben.

b) Der Weg zum Ziel wird weitgehend freigestellt (Schulautonomie).

c) Es wird extern überprüft, inwieweit diese Ziele erreicht werden.

Durch diese Verfahrensweise kann das System auf viele Einzelregelungen verzichten und sich weitgehend autonom steuern. Das niederländische Examensprogramma beschreibt sehr detailliert die Ziele im Gymnasium. Es gibt an, welchen Stand der Schüler bis zum Abitur erreicht haben muss und was daher in den Zentralabituraufgaben von ihm verlangt werden kann.

Das aktuelle Examensprogramma von Wiskunde gilt seit der Oberstufenreform von 1998/99. Es beschreibt erstmals neben den fachlichen Inhalten auch die zu erreichenden Fertigkeiten. Die Beschreibung der Fachinhalte von Wiskunde ist sehr detailliert. Die Teilziele sind nummeriert, was die Diskussion sehr vereinfacht. Die Niederländer gehen sehr pragmatisch mit diesem Examensprogramma um: es ist nicht für längere Zeit - wie z.B. unsere Lehrpläne - unveränderlich. Es kann abgeändert, befristet gekürzt oder ergänzt werden. So wurden bei der Einführung der neuen Examensprogramma die Teilziele 109 bis 121 (Graphen und Matrizen) zunächst wegen zu großer Stofffülle bis zum Jahr 2005 ausgesetzt.

Das Examensprogramma für Wiskunde A gibt 150 fachliche Teilziele vor, die die geforderten Inhalte knapp und präzise beschreiben und die in den letzten drei Jahren bis zum Abitur behandelt werden müssen. Als Beispiel folgen die Teilziele des Unterbereiches „Ableitung von Funktionen“: „Der Prüfling kann

(77) den Differentialquotient gebrauchen als Maß für die lokale Veränderung einer Funktion.

(78) den Differentialquotient näherungsweise ermitteln, falls die Funktion durch eine Gleichung gegeben ist.

(79) die Ableitungsfunktion gebrauchen, um das Änderungsverhalten der Funktion zu charakterisieren.

(80) die verschiedenen Schreibweisen für die Ableitung erkennen und gebrauchen:

$$f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df(x)}{dx},\ \frac{dk}{dq}$$

(81) die Ableitungsfunktion gebrauchen, um die Gleichung der Tangente an einen Graphen aufzustellen.

(82) die Ableitungsfunktion gebrauchen beim Ermitteln oder Verifizieren von Extremwerten einer Funktion.

(83) die Ableitungsfunktion bestimmen zu Funktionen vom Typ $y = c \cdot x^r$ (r rational), $y = g^x$ und $y = g \log_g x$.

(84) bei der Ermittlung der Ableitungsfunktion die Summen-, Differenzen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel gebrauchen.“

Im fachlichen Teil des Examensprogramma gibt es zusätzlich einen Unterbereich „Wahlthemen“, in dem die Schulen durch die Wahl weiterer Themen individuelle Akzente setzen können. Die Themen können, falls die Schule es will, für jeden Prüfling verschieden sein. Die Wahlthemen umfassen 40 Stunden.

Allgemeine Fertigkeiten im Examensprogramma: Das Examensprogramma beschränkt sich nicht auf die inhaltlichen Stoffziele eines Faches. So wird in Wiskunde A auch angegeben, welche allgemeinen Fertigkeiten die Schüler bis zum Abitur erwerben sollen. Die vier Unterbereiche mit insgesamt 24 Teilzielen werden im Folgenden vollständig aufgeführt:

„Unterbereich: Fertigkeiten beim Sich-Informieren

Der Prüfling kann

(1) Artikel oder Berichte in (Nachrichten-)Medien oder Fachliteratur, in denen mathematische Darstellungen, Begründungen oder Berechnungen vorkommen, kritisch analysieren.

(2) Informationen erwerben und auswählen aus schriftlichen, mündlichen und audiovisuellen Quellen, auch mittels ICT (Informations- und Kommunikationstechnologien).

(3) Informanten auswählen und befragen.

(4) erforderliche Daten ermitteln und interpretieren aus Graphiken, Zeichnungen, Simulationen, Diagrammen und Tabellen, auch mittels ICT.

(5) Daten in Graphiken, Zeichnungen, Diagrammen und Tabellen darstellen, auch mittels ICT.

(6) Wesentliches und Unwesentliches voneinander unterscheiden.

(7) Fakten mit Quellen belegen.

(8) Informationen analysieren, schematisieren und strukturieren.

(9) die Zuverlässigkeit von Informationen beurteilen und ihren Wert feststellen für die Lösung des Problems oder die Durchführung des Projektes.

(10) (historische) Situationen nennen, in denen Mathematik eine wichtige Rolle spielt oder gespielt hat.

(11) Beispiele nennen für die Anwendung der Mathematik in anderen Fachgebieten, in Berufen oder in der Kunst

Unterbereich: Fertigkeiten beim Untersuchen

Der Prüfling kann

(12) logische Beziehungen zwischen Daten, Behauptungen und Ergebnissen herstellen und beurteilen, sowie relevante Daten von weniger relevanten Daten unterscheiden.

(13) Daten miteinander und mit der Problemstellung in Zusammenhang bringen, daraus einen geeigneten Lösungsansatz ermitteln und diesen - falls möglich - in Teilziele untergliedern.

(14) in einem Text vorkommende Angaben zweckmäßig in eine mathematische Darstellung (Modell) bringen.

(15) feststellen, ob ein gewähltes Modell geeignet ist und, falls nötig, ein Ersatzmodell vorschlagen.

(16) feststellen, ob zusätzliche Angaben erforderlich sind, und wenn ja, welche.

(17) untersuchen, inwieweit das Modell geändert werden muss, infolge von Änderungen der Gegebenheiten.

(18) eine für das Modell geeignete mathematische Lösungsmethode korrekt durchführen.

(19) Ergebnisse in Bezug auf den Kontext auswerten und sie innerhalb des Kontextes kritisch analysieren

(20) die Genauigkeit der gegebenen Daten und der Arbeitsmethoden bei der Beurteilung des Endergebnisses berücksichtigen.

(21) über die getroffene Wahl bei Darstellung, Arbeitsmethode, Lösungsverfahren und Ergebnissen reflektieren und das in Worte fassen.

Unterbereich: Technisch-instrumentelle Fertigkeiten

Der Prüfling kann

(22) beim Verwenden, Aufsuchen und Darstellen mathematischer Informationen und beim Ausführen mathematischer Arbeiten und Begründungen die ICT verwenden

Unterbereich: Sich orientieren über Studium und Beruf

(23) Der Prüfling hat sich Informationen eingeholt über Studiengänge, in denen Mathematik eine Rolle spielt.

(24) Der Prüfling hat geprüft, inwieweit er die richtige Einstellung zum Lernen, Interesse und Fertigkeiten besitzt, die für die weitere Ausbildung wünschenswert oder sogar erforderlich sind.“

Die externe Überprüfung, inwieweit an einer Schule die Ziele des Examensprogramma erreicht worden sind, erfolgt zunächst durch das Zentralabitur und die externe Zweitkorrektur der zentralen Abiturarbeiten durch eine andere Schule. Zusätzlich gibt es nach dem Abitur Besuche durch die Schulinspektion an einigen Schulen.

Das Abitur gliedert sich in *centraalexamen* (zentrale Püfung) und *schoolexamen* (Schulprüfung). Die Abiturnoten werden aus beiden Prüfungen gebildet. Ein Vergleich der Schuldurchschnittsnote im Zentral- und im Schulabitur wirkt standardisierend auf die Notengebung in der Schule zurück.

Die Schulen bestimmen weitgehend selbst darüber, auf welchem Weg sie die Zielvorgabe „Examensprogramma“ erreichen. Sie können z.B. selbst entscheiden über die Anzahl der Mathematikstunden, die Anzahl und Länge von Klassenarbeiten, die Anordnung des

Unterrichtsstoffes, die Aufnahme weiterer Themen. Zusätzlich bestimmen sie durch das Globalbudget weitgehend über Personal und Material.

Außerdem gibt es weitere Maßnahmen, durch die die Anforderungen und Bewertungsmaßstäbe der weitgehend autonomen Schulen landesweit angeglichen werden. Die Schulinspektion greift nicht direkt in das schulische Geschehen ein. Sie beobachtet und beschreibt:

- Die Schulinspektion besucht im Abstand von zwei bis drei Jahren jedes Gymnasium. Es werden Kurzhospitationen in ca. 50 Unterrichtsstunden und ausführliche Gespräche mit Eltern-, Lehrer- und Schülergruppen durchgeführt. Danach wird ein ausführlicher wertender Schulbericht erstellt.

- Die Schulinspektion stellt seit einigen Jahren alljährlich wesentliche Leistungsdaten von jeder einzelnen Schule in einer sogenannten Qualitätskarte zusammen. Diese enthält die durchschnittliche Klassengröße, den Anteil der Sitzenbleiber in den einzelnen Stufen, die Durchschnittsnoten der Schule im Zentralabitur in den einzelnen Fächern usw.

Die Schulberichte und die Qualitätskarten werden in Broschüren bzw. im Internet veröffentlicht. Diese öffentliche Darstellung durch die Schulinspektion kann Rückwirkungen auf die Anmeldezahlen einer Schule haben. Da aber die staatlichen Zuweisungen an die autonomen Schulen weitgehend von der Schülerzahl einer Schule abhängen, wirkt die Schulinspektion damit indirekt auf die Qualität der Arbeit an einer Schule ein.

6.3 Wiskunde A

Der Ausgangspunkt: Es gibt unter den Schülern, die den Hochschulzugang anstreben, eine große Anzahl von Schülern, die ihren schulischen Schwerpunkt nicht in Mathematik und Naturwissenschaften setzen wollen oder die mit abstrakter, theoretischer Mathematik erhebliche Schwierigkeiten haben. Welchen und wie viel Mathematikunterricht soll man diesen Schülern anbieten? Der niederländische Weg: In den 70-er Jahren des letzten Jahrhunderts hatten sich in den Niederlanden Klagen über den Mathematikunterricht gehäuft. Viele fanden, dass er zu wenig lebensnah und zu schwierig war. Es gab daraufhin eine jahrelange Versuchsphase zur Reform des Unterrichtes (Hewet-Projekt) und als Ergebnis die Reform von 1985. Seither können die Schüler im vwo (Gymnasium) in den letzten beiden Schuljahren vor dem Abitur, d.h. im 11. und 12. Schuljahr, zwischen Wiskunde A und Wiskunde B wählen. Für Wiskunde A ist das Bemühen um zwei Ziele kennzeichnend:

a) Anwendungsorientierung: Den Schülern begegnet die Mathematik in Wiskunde A vorwiegend in vielfältigen, außermathematischen Kontexten und Anwendungssituationen,

b) selbständiges Arbeiten der Schüler.

Diese grundsätzlichen Zielsetzungen von Wiskunde A haben sich auch durch die Oberstufenreform 1999 (tweede fase) nicht geändert, seit der man zwischen Wiskunde A1 im Profil ‚Kultur und Gesellschaft' und Wiskunde A1,2 im Profil ‚Wirtschaft und Gesellschaft' unterscheidet. Seit 1989 gibt es übrigens Wiskunde A auch in der havo, die oft nicht ganz zu Recht mit unserer deutschen Realschule gleichgesetzt wird. In Deutschland wählen die eingangs beschriebenen Schüler den Grundkurs. In der Praxis wird der Grundkurs bei uns aber immer noch häufig nur als stark vereinfachter, verkürzter Leistungskurs praktiziert. Hierin besteht ein deutlicher Unterschied zu den Niederlanden, denn dort verfolgt Wiskunde A ein völlig eigenständiges Konzept. Wiskunde A ist keine echte Teilmenge von Wiskunde B. Die pädagogischen Ziele von Wiskunde A: Wiskunde A liegt die Konzeption der Realistic Mathematics Education (RME) zugrunde, die vor allem vom Freudenthal-Institut an der Universität Utrecht seit den 70-er Jahren entwickelt wurde. Das ist eine Auffassung vom Lernen und Lehren von Mathematik, die Jan de Lange, der Direktor des Freudenthal-Institutes, so umreißt:

„Die Prinzipien, die dieser Auffassung zugrunde liegen, sind stark von Hans Freudenthals Konzept der ‚Mathematik als einer menschlichen Aktivität' beeinflusst. Er war der Ansicht, dass Schüler nicht als passive Empfänger von fertiger Mathematik betrachtet werden sollten, sondern dass der Unterricht ihnen zunehmend die Gelegenheit bieten sollte, Mathematik wieder neu zu erfinden. Lernsituationen können viele Probleme darstellen, die die Schüler als bedeutungsvoll erfahren." [4] Das heißt: Es sollen dem Schüler Probleme in Kontexten angeboten werden, die ihn zur Bearbeitung reizen, die seiner Erfahrungswelt entnommen sind und die er für bedeutend hält. Dadurch sollen Schüleraktivitäten ausgelöst und neue mathematische Konzepte, Begriffe und Verfahren entwickelt werden (conceptual mathematics). Anschließend lassen sich diese Konzepte einüben, anwenden

[4] De Lange, Jan (2001): auf den Internetseiten des Freudenthal-Institutes (www.fi.ruu.nl)

und verbessern. Die Kontexte sollen also letztlich den Zugang zu den mathematischen Inhalten verbessern.

Die inhaltlichen Ziele von Wiskunde A werden sehr global im Hewet-Report von 1980 beschrieben:

„Wiskunde A ist für Schüler bestimmt, die in ihrem Studium wenig Weiterbildung in Mathematik haben werden, die aber dennoch Mathematik in gewissem Umfang gebrauchen müssen. Vor allem wird an diejenigen gedacht, die sich darauf einstellen müssen, dass die Mathematik auch immer mehr in Fachgebiete außerhalb der Naturwissenschaften vordringt. Das bedeutet, dass die Schüler in ihrem Unterricht die Bedeutung einer mathematischen Darstellung beurteilen lernen müssen. Daher sollen sie vertraut gemacht werden mit einem mathematisch korrekten Umgang mit Zahlen, mit Darstellung in Formelsprache und unterschiedlichen Formen mathematischer Darstellung. Außerdem müssen sie lernen, mit mathematischen Modellen zu arbeiten und die Relevanz dieser Modelle zu beurteilen.“ [5]

Der Lehrplan: Im Unterricht von Wiskunde A werden Gebiete bevorzugt, die für Anwendungen wichtig sind wie z.B. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, diskrete dynamische Modelle, lineares Optimieren, Matrizenrechnung, Extremwertbestimmungen in der Analysis usw. Die Standards für das 10. bis 12. Schuljahr werden sehr detailliert im *examensprogramma* beschrieben. So umfasst das *examensprogramma* für Wiskunde A genau 150 Unterpunkte, die bis zum Abitur erreicht werden müssen, wobei der methodische Weg weitgehend freigestellt ist. Die Anwendungsorientierung von Wiskunde A wird in der vorliegenden Publikation u.a. durch zahlreiche Aufgaben aus dem Zentralabitur verdeutlicht. Das Zentralabitur von Wiskunde A enthält nur Aufgaben mit außermathematischen Kontexten. Das dürfte wohl einmalig in der Welt sein. Die Abituraufgaben von Wiskunde A weisen einige typische Merkmale auf:

- Die Aufgaben tragen einen Titel, der den Kontext angibt (z.B. Straßenbeleuchtung, Winter, Vögel).
- Die Aufgabentexte sind i.a. ziemlich lang, da die Kontexte ausführlich dargestellt werden. Sie stellen daher erhebliche Anforderungen an die Lesekompetenz der Schüler.
- In vielen Aufgaben werden authentische Kontexte dargestellt. Ein Buch mit den Abituraufgaben für Wiskunde A ist daher eine interessante, anregende Lektüre. Einige Themen aus den letzten Jahren: Lebensdauer von Kaffeemaschinen (2003), Verbrauch von Grundstoffen (2003), Tennisaufschlag (2000), Übergewicht (2000), globale Sonneneinstrahlung (1999), Briefmarkenkatalog (1999), Sonnenkollektoren (1998).
- Es können auch überraschend einfache Einstiegsfragen vorkommen, die Unterrichtsstoff aus weiter zurückliegenden Schuljahren wieder aufgreifen. Das verdeutlicht auch die Bedeutung, die im niederländischen Unterricht dem kumulativen Lernen zukommt.
- Die Rechnungen sind i.a. nicht lang. Es kommt häufig auf eine Idee an. Der Anteil der Aufgaben, die keine reine Routineaufgaben sind, ist nicht gering.

[5] De Lange, Jan: Waarom een Wiskunde A-lympiade? in: Vijf jaar Wiskunde A-lympiade. Utrecht 1995, S.9

- Die Abituraufgaben sind vorher nur schlecht in ihrer Thematik auszurechnen. Manche Themen treten allerdings im Laufe der Jahre doch häufiger auf, wie z.B. Wachstumsvorgänge, Auswertung von Statistiken mit Hilfe der Beurteilenden Statistik, die ausführliche Auswertung von Grafiken.

- Die mathematischen Modelle werden durch die Aufgabenstellungen für die Anwendungssituationen weitgehend vorgegeben.

- Bei jeder Frage ist die erreichbare Punktzahl angegeben. Insgesamt müssen die Schüler im Zentralabitur in Wiskunde A in drei Stunden vier oder fünf Aufgaben bearbeiten, die insgesamt aus ca. 20 einzelnen Fragen bestehen.

Die geschlossene Form der Abituraufgaben lässt natürlich wenig von dem pädagogischen Ziel Freudenthals erkennen, an reizvollen realistischen Kontexten Mathematik neu zu finden. Das Freudenthal-Institut hat daher 1989 einen Mathematikwettbewerb für Wiskunde A - die Wiskunde-Alympiade - ins Leben gerufen, in dem sehr komplexe und offene mathematische Fragestellungen mit motivierenden Kontexten zu bearbeiten sind (siehe hierzu Kapitel 9.1). Außerdem müssen die Schüler von Wiskunde A seit der Oberstufenreform von 1999 eine schulabhängige Anzahl kleinerer Facharbeiten (praktische opdrachten) anfertigen, die häufig anwendungsorientierte Themen haben und deren Problemstellung sehr offen ist. Das selbständige Arbeiten in Wiskunde A: Man kann im Unterricht von Wiskunde A verschiedene Methoden beobachten, die die selbständige Auseinandersetzung der Schüler mit Mathematik fördern sollen. So publiziert der Mathematiklehrerverband fortlaufend kleine mathematische Themenhefte (Zebra-Boeken), von denen sich jeder Schüler ein oder zwei zum selbständigen Durcharbeiten auswählen muss. Das ist auch im neuen Lehrplan seit 1999 unter dem Titel ‚Zebra' mit einer bestimmten Stundenzahl festgeschrieben.

Weit verbreitet ist im Unterricht von Wiskunde A die selbständige Bucharbeit. Diese recht einfache, pragmatische Unterrichtsform hat sich in den letzten Jahren in Wiskunde A weitgehend durchgesetzt. Dabei arbeiten die Schüler über mehrere Unterrichtsstunden hinweg selbständig in ihren Mathematikbüchern. Der Lehrer gibt den Schülern ein umfangreiches Thema als Ziel vor. Beispiel: „Arbeitet die Seiten über die Binomialverteilung im Buch durch und löst die zugehörigen Aufgaben." Es hängt vom Lehrer ab, ob das in Gruppenarbeit, Partnerarbeit oder Individualarbeit geschieht. Die Ergebniskontrolle führen die Schüler selbst durch mit Lösungsheften oder mit vom Lehrer ausgearbeiteten Musterlösungen. Der Lehrer berät während des Arbeitens einzelne Schüler bzw. Schülergruppen. Die Bucharbeit ist eine für den Lehrer einfache, pragmatische Methode, und dennoch fördert sie wichtige Arbeitstechniken beim Schüler. Die Schulbuchautoren haben in den letzten Jahren sehr stark darauf geachtet, die Bücher so zu schreiben, dass sie für die Schüler gut verständlich sind und dass der Lehrer wenig helfen muss.

Erfahrungen mit Wiskunde A: Mittlerweile liegen 20 Jahre Erfahrung mit dem Konzept von Wiskunde A vor. Die niederländischen Lehrer beurteilen Wiskunde A weit überwiegend positiv. Durch Wiskunde A wird mancher Schüler erreicht, den eine abstrakte, beweisintensive Mathematik nicht erreichen würde. Die Ideen von Wiskunde A wurden in den Niederlanden in den 90-er Jahren auch in der Grundschule und in den Klassen 7 bis 9 übernommen. Die Ideen haben die Schulmathematik in anderen Ländern und sogar die Konzeption von PISA beeinflusst. So schreibt z.B. Kees Hoogland in Euclides, der

Zeitschrift des Mathematiklehrerverbandes: „Weltweit gibt es sehr viel Wertschätzung für unser Bemühen, soviel Schüler wie möglich auf ihrem eigenen Niveau soviel sinnvolle mathematische Fertigkeiten und Erfahrungen wie möglich praktizieren zu lassen.“(Jg. 2000, S.37).

Es gibt gelegentlich Einwände von reinen Mathematikern an den Hochschulen. Nach dem Abitur 2000 meinten einige Hochschulmathematiker in Bezug auf Wiskunde A kritisch, dass es in der Mathematik nicht nur um das Lösen von Alltagsproblemen gehen dürfe. Es gehe auch um Strukturprobleme in verschiedenen Abstraktionsniveaus. Die Reaktionen auf diese Kritik zeigten dann aber deutlich, wie breit die Unterstützung für Wiskunde A heute in den Niederlanden bei Fachdidaktikern und Lehrern ist. Ein Problem ist aber sicher, dass Wiskunde A den Zugang zu einem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften erschwert. Das in Wiskunde A weit verbreitete selbständige Arbeiten in den Schulbüchern hat die Bedeutung der Schulbücher für den Unterricht erhöht. Es wird aber kritisiert, dass inzwischen die Darstellung in den Schulbüchern, um dem Schüler Schwierigkeiten zu ersparen, vielfach zu kleinschrittig geworden ist. Durch die Schulbücher sind allerdings viele gute Kontexte entwickelt worden, was den Lehrer in der Unterrichtsvorbereitung stark entlastet.

Manche Folgen von Wiskunde A auf die Schülerschaft sind noch nicht abschließend zu beurteilen. Einerseits wird z.B. konstatiert, dass Wiskunde A die heuristischen Fähigkeiten zum Lösen komplexer Probleme bei Schülern nicht in dem Umfang entwickelt hat, wie man es sich anfangs erhofft hatte. So schreibt der Didaktiker Zwanefeld: „Anfänglich ging man beim realistischen Mathematikunterricht davon aus, dass die Schüler durch die Mathematik das Lösen von Problemen von selbst lernen würden. Inzwischen ist klar, dass davon keine Rede sein kann. Das zeigen zum Beispiel Dissertationen.“ [6]

Andererseits ist festzustellen, dass niederländische Schüler bei TIMSS 1995 und 1999 in Europa ganz weit vorn landeten. Dabei zeigen Feinanalysen, dass sie bei Kontextaufgaben, aber auch bei neuartigen Aufgabenstellungen relativ gut abschneiden. Diese höhere Flexibilität der Schüler wird in den Niederlanden auch auf das häufige Arbeiten mit Kontexten zurückgeführt. „In den Niederlanden sind wir bemüht, Mathematik so mit Kontexten anzubieten, dass sie für den Schüler sinnvoll sind, und zwar nicht erst für später, sondern schon während des Lernprozesses. Niederländische Schüler bekommen Mathematik anders dargeboten als in vielen anderen Ländern. Die internationalen Vergleichsuntersuchungen schließen sich nur teilweise an unseren Lehrplan an (ungefähr zu 70%). Unsere Schüler sind sehr unbefangen und geben korrekte Antworten in Aufgaben, die sie vorher noch nicht gesehen haben. Wenn sie eine Aufgabe sehen, dann denken sie nicht ”Die kenn ich nicht, die kann ich nicht.“, sondern „Lass es mal probieren.“ [7]

[6] Zwaneveld, Bert: Een blik achteruit en een beetje vooruit, in: Honderd jaar Wiskundeonderwijs, Leusden 2000, S.418

[7] Vos, Pauline, Bos, Klaas: Nederlands wiskundeonderwijs bij de internationale top, in: Euclides. März 2001

6.4 Wiskunde B

Wiskunde B kann von den Schülerinnen und Schülern in der Oberstufe gewählt werden. Seit 2001 wird dabei noch unterschieden zwischen Wiskunde B1,2 (Profil: Natur und Technik) und B1 (Profil: Natur und Gesundheit). Es ist vor allem auf Schülerinnen und Schüler ausgerichtet, die später ein Studium der Mathematik, Naturwissenschaften oder Medizin aufnehmen wollen. Wiskunde B ähnelt unserem Leistungskurs. Es ist stärker theoretisch ausgerichtet als Wiskunde A und baut die Mathematik strenger mit Beweisen auf. Allerdings ist in den letzten Jahren zu beobachten, dass auch in Wiskunde B immer stärker realitätsnahe Kontexte in den Aufgaben vorkommen.

Das Examensprogramma (siehe 6.2) für Wiskunde B beinhaltet die folgenden Gebiete:

- Allgemeine Fertigkeiten
- Funktionen und Graphen
- Diskrete Analyse,
- Geometrie
- Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung,
- Differential- und Integralrechnung
- Dynamische Modelle
- Trigonomeetrische Funktionen
- Normalverteilung und das Testen von Hypothesen
- Auswahlthemen
- Fortgeführte Geometrie (Beweise in der Ebenengeometrie, Abstandsberechnungen, Kegelschnitte ....)
- Fortgeführte Analysis (Reihen und deren Konvergenz, Irrationale Zahlen, Grenzwertbetrachtungen, ...)

Auffallend für einen deutschen Beobachter ist die Tatsache, dass das Gebiet der „Analytischen Geometrie“ in den Niederlanden in der Oberstufe keine Rolle spielt. Einen breiten Raum nimmt hingegen im Unterricht die koordinatenfreie klassische Geometrie ein, was sich dadurch begründet, dass sie nicht mehr in der Mittelstufe behandelt wird, sondern Stoff der Oberstufe ist.

Die Verlagerung der Geometrie in die Oberstufe ermöglicht es, Beweisverfahren in einem Alter zu thematisieren, in dem die Schülerinnen und Schüler offener und fähiger für diese Thematik sind. Von daher ist es folgerichtig, dass auch in den Zentralabituraufgaben geometrische Beweise verlangt werden.Die schriftlich, zentral gestellten Examina haben im Bereich der Wiskunde B eine Entwicklung durchgemacht von Prüfungsaufgaben, die an unsere Leistungskursaufgaben erinnern, hin zu Aufgabenkonzeptionen, die immer mehr (und nicht nur aus dem Bereich der Stochastik) Realitätsnahe fordern und vom Umfang der Aufgabenstellung durch Einbeziehen von Texten, Tabellen, Grafiken der Förderung und Forderung der Lesekompetenz gerecht werden.

Die Tatsache, dass realitätsnahe Aufgaben jetzt auch eine wichtige Rolle im Bereich der Wiskunde B spielen, schlägt sich auch deutlich im Umfang der Examina nieder. So bestand im Jahre 2001 das Examen Wiskunde B (alter Prägung) aus zwei Seiten, das Examen B1 aus fünf Seiten und B1,2 aus 6 Seiten. Der authentische Kontext (Zeitungsartikel, - ausschnitte) vergrößert den Umfang der Aufgabenstellung und verlangt von den Schülerinnen und Schülern größere Lesekompetenz. Die Dauer des zentralen Examens in Wiskunde B beträgt 3 Stunden. Für jeden Schüler ist der Besitz eines grafikfähigen Rechners Pflicht.

6.5 Neue Medien und Wiskunde

oder wie es in den Niederlanden üblich ist: ICT (Information and Computer Technology) im Mathematikunterricht.

Schon in den 70er Jahren entwickelte das Freudenthal Institut Unterrichtssoftware für Primar- und Sekundarstufen, wobei damals die isolierte Nutzung von Einzelprogrammen im Vordergrund stand. Spezielle Software zum Plotten von Funktionsgraphen, Tabellenkalkulation, Experimentelle Untersuchung von stochastischen und dynamischen Modellen wurden an die Schulen verteilt. Die Schulbücher übernahmen diese Einzelprogramme teilweise in besonderen Kapiteln.

In den 90er Jahren wurde der Grafiktaschenrechner (GTR) für die Oberstufe landesweit verbindlich eingeführt. Zumeist handelt es sich um den TI83. Unterstützende Strukturen in der Fortbildung des Freudenthal Instituts und T Europe begleiteten die Einführung. Seitdem findet man Displayabbildungen in Aufgaben der Schulbüchern, auch Examensaufgaben mit Einbeziehung der Grafiken sind keine Ausnahmen mehr. Nur vereinzelt sind Berichte über TI92 zu finden. Im Bereich CAS sind unterrichtsbegleitende Studien mit Derive durchgeführt worden.

Heute liegt der Schwerpunkt auf der Integration aller Möglichkeiten der Neuen Medien im Unterricht. Bestandteile sind Applets, Taschenrechner und Grafikrechner, CAS, Lernumgebungen mit Digital Videos und Internetwebseiten.

Angestrebt wird eine Lernumgebung für den Mathematikunterricht, in der Computeralgebra eingebettet ist. Die digitale Lernumgebung sollte die Funktionen

- Textverarbeitung mit Formeleditor
- Grafikprogramm
- Tabellenkalkulation
- Computeralgebra
- Browser mit Internetzugang
- Anschluss von grafischen Taschenrechnern mit Sensoren umfassen.

Insbesondere die Textverarbeitung ist wichtig zur Erstellung von Berichten und Referaten, die im Bereich ?praktische opdrachten? verlangt werden.

Schülerinnen und Schülern wird die Gelegenheit gegeben, kreativ und selbstständig nach Problemlösungen zu suchen. Dabei können die neuen Medien eine wichtige Rolle spielen. Die Kommunikation mit den Mitschülern wird gefördert, das Gespräch mit der gesamten Klasse ist neben der Arbeit in Kleingruppen weniger dominant als in Deutschland.

Voraussetzung für die Umsetzung der Integration von ICT und Mathematik ist eine solide Hardwareausstattung. Alle niederländischen Schulen wurden in den letzten Jahren über das Kennisnet an das Internet angeschlossen.

Die Förderung von ICT ist an diverse staatliche Programme geknüpft, die von der Schwerpunktsetzung der Regierung (http://www.ictonderwijs.nl/) abhängig ist. In den letzten fünf Jahren war ein Ziel, alle Schulen des Landes mit einem Netzzugang zum Internet auszustatten. Die Struktur des Kennisnet wurde aufgebaut. http://www.kennisnet.nl Mittlerweile kann sich jede Schule selbst einen günstigen Provider auswählen.

Die Umsetzung des Aufbaus von Netzwerken in den Schulen ist abgeschlossen. Besuche in verschiedenen Schulen zeigten unterschiedliche Modelle in der Netzwerkunterstützung: Netzwerkadministrator am Einstein Lyceum (http://www.einsteinlyceum.nl/), Unterstützungssystem der Rotterdamer Schulen (http://www.stict.nl/) und das CIAO Projekt (http://www.ciao.nl/) sind Beispiele für regionale und autonome Projekte. Ermöglicht werden diese Modelle durch die Autonomie der Schulen, die sich in größeren privaten Trägerschaften oder der Gemeinde befinden. Die Lehrer sind mit den technischen Arbeiten in der Regel nicht befasst. Eine Vernetzung per Funknetz (WAN) wird kaum in Erwägung gezogen. Auch der Einsatz von Laptops in Klassen ist kein aktuelles Thema in den Schulen.

Die Internetunterstützung der Lehrerinnen und Lehrer über Information und Einsatz von ICT ist umfassend.

Das Freudenthal Institut in Utrecht http://www.fi.uu.nl ist das zentrale Didaktik Institut für Mathematik in den Niederlanden.

Rekenweb www.rekenweb.nl ist eine Portalseite für Schüler, Eltern und Lehrer.

Auf der Schülerseite stehen monatlich neu Probleme für die Mittel- und Oberstufe. Auf der Lehrerseite werden Informationen zum Einsatz von ICT veröffentlicht, sowie viele Ideen für Arbeitsblätter und Unterrichtsstunden.

Wisweb www.wisweb.nl

Es werden eine Vielzahl von Applets angeboten. Es gibt Arbeitsblätter für alle Stufen und kostenlose Software zu Einzelthemen. Eine Linkliste verbindet alle niederländischen Mathematikseiten.

Suchmaschine http://wiskunde.pagina.nl/

Für alle Themen von Wiskunde

Nieuwe WisKrant http://www.fi.uu.nl/wiskrant/

Das Freudenthal Institut bietet auf den Seiten online Artikel zu mathematik-didaktischen Themen an.

Begleitende Fortbildungen werden regional und landesweit vom Freudenthal Institut und Universitäten angeboten. Ein Schwerpunkt sind konkrete Themen und ihre Umsetzung im Unterricht.

Wer im Internet sucht, findet dort auch sehr schnell die flämischen Wiskundeseiten, die ebenso ein reichhaltiges Angebot an Materialien zeigen.

Literaturverzeichnis

de Haan, Dédé: 10 jaar Wiskunde A-lympiade, de opstap naar de twede fase. Utrecht 1999

de Lange, Jan: Waarom een Wiskunde A-lympiade?, in: Vijf jaar Wiskunde A-lympiade. Utrecht 1995

Keemink, N. C., Thiel, P.: VWO Wiskunde B, Examenbundel 2002/2003. Utrecht, Zutphen 2003

Klippert, Heinz: Methodentraining. Weinheim und Basel 1994

Vos, Pauline, Bos, Klaas: Nederlands wiskundeonderwijs bij de internationale top, in: Euclides. März 2001

Vuijk, R.A.J. et al.: Getal en Ruimte, 1MHV2, Wiskunde voor het eerste leerjaar, mawo/hawo/vwo. Houten 2000

Vuijk, R.A.J. et al.: Getal en Ruimte, 3V1, voor het deerde leerjaar vwo. Houten 2000

Vuijk, R.A.J. et al.: Getal en Ruimte, vwo EM5, Wiskunde A1.2 vwo voor de twede fase. Houten 2000

Zwaneveld, Bert: Een blik achteruit en een beetje vooruit, in: Honderd jaar Wiskundeonderwijs. Leusden 2000, S. 413 - 421